振动和波 (Oscillations and Waves)

1. 振动

1.1 简谐振动 (Simple Harmonic Motion)

运动学角度

$$\frac{d^2x}{dt^2}m + kx = 0 \quad or \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \\ Derived\ from\ Newton's\ second\ Law:\ F = ma \tag{1}$$

$$x = x_m cos[\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) + \phi] \\ Derived\ from\ Eq(1). \tag{2}$$

推导思路：根据导数形式尝试寻找某个通解

　　特征：某一个函数的二阶导数含有自已的一次项 → 正弦余弦函数 → $x = A\ sin(f)\ or\ A\ cos(f)$

　　谁的导数：$t \rightarrow f = \omega t + \phi\ (\omega\ ,\phi\ means\ no\ real\ world\ constants)$

　　系数：$\frac{d^2cos(\omega t+\phi)}{dt^2} = -\omega^2 cos(\omega t + \phi)\ \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$

周期：正余弦函数的周期性，$Iff\ \delta\omega t = 2k\pi, \delta f = 0 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

频率：$f = \frac{1}{T}$(每秒钟重往返次数)，角频率：$\omega = 2\pi f$

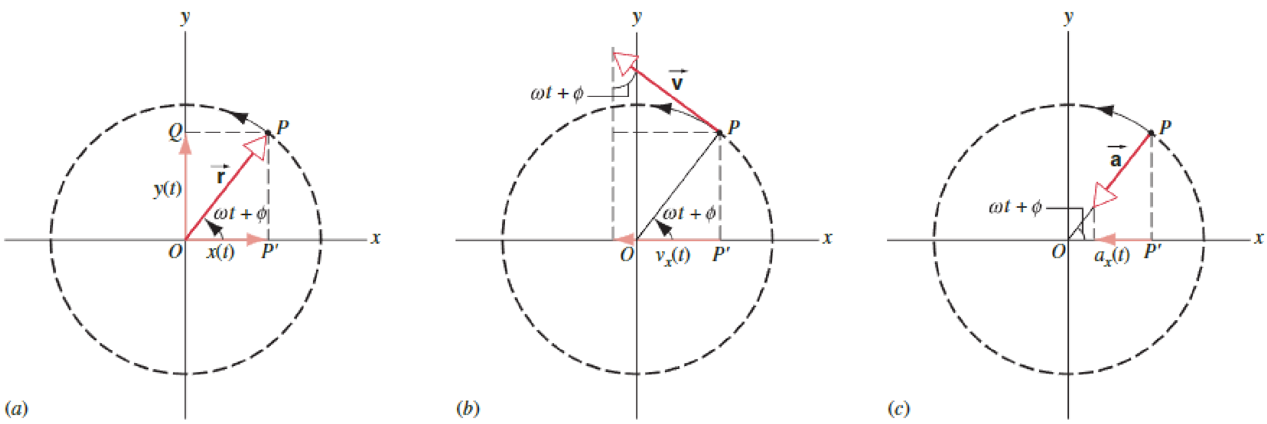
振幅：函数的极值，$A = x_{max} = x_m$

相位：$\omega t + \phi$，描述一种空间位置

速度：$\frac{dx}{dt} = -\omega x_m sin(\omega t + \phi)$

加速度：$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m cos(\omega t + \phi)$

常用方法：相位转化为极坐标系中的角度，所以角频率 ω 对应着角速度。



能量角度

动能：

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \\ v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \tag{3}$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi) \tag{3}$$

$$K = \frac{1}{2}m(-A\omega\sin(\omega t + \phi))^2$$

势能：

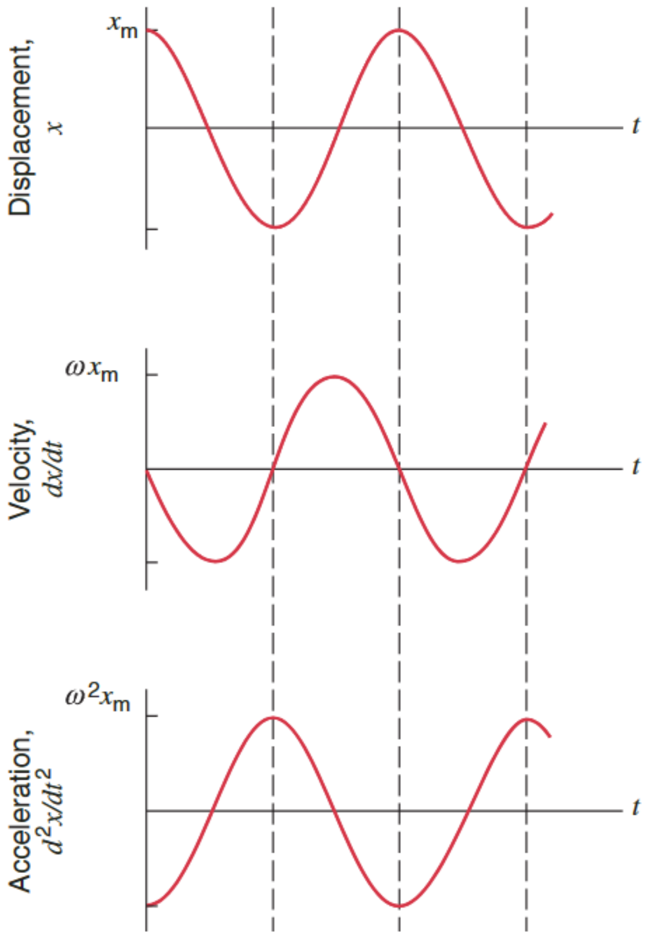
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

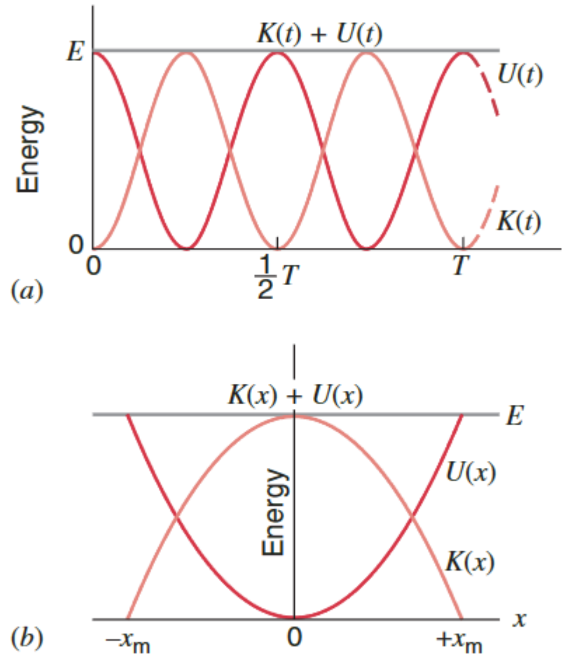
弹力 $\rightarrow F = (some\ K)x$，也就是与距离成线性关系的力。

如何推导？积分： $PE = -\int F dx \quad PE = -\int(-kx)dx \quad PE = k\int x dx \quad PE = \frac{1}{2}kx^2$

总能量：

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ E &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \end{aligned} \tag{4}$$





应用

- 扭转振荡器 (torsional oscillator)

  是一个简谐振动系统，一个通过细线固定并能在水平面内自由旋转的圆盘。当圆盘偏离平衡位置，扭曲的线会施加一个恢复扭矩 τ_z，与角位移成正比：

  $\tau_z = -\kappa\theta$

  其中 τ_z 是恢复扭矩，κ 是扭转常数，θ 是圆盘的角位移。负号表明扭矩的方向旨在将圆盘恢复到平衡位置。

  总扭矩与角加速度的关系（牛顿第二定律的角形式）：

$\Sigma\tau_z = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$

角简谐运动的运动方程：

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta$

角简谐运动的解：

$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$

- 单摆及变种 (simple pendulum)
  - 小角度摆动

    恢复力与角位移 θ 成正比

    $\theta = sin\theta$，位移可以表示为 $x = L\theta$，施加的力 $F = mg\theta = \frac{mg}{L}x$

    故：$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
  - *大角度摆动

    正弦函数的近似不再成立

    $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\sin^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{11}{3072}\sin^4\frac{\theta_m}{2} + \dots\right)$
- 复摆 (physical pendulum)

  恢复扭矩与角位移 θ 成正比

  在小角度近似下，得到运动方程：

  $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgd\theta$ 重排： $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0$

  周期 T：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} \tag{5}$$

  对于简单摆，周期 T 是：

  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 等效长度：$L = \frac{I}{Md}$

1.2 阻尼和受迫振动 (Damped Harmonic Motion and Forced Oscillations)

阻尼振动

一个振幅随时间衰减的振动系统。在粘滞阻尼的情况下，阻尼力与速度成正比：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{6}$$

阻尼振动的位移随时间变化为：

$$x(t) = x_0 e^{-bt/(2m)}\cos(\omega t + \phi) \tag{7}$$

其中，振动的角频率受阻尼影响：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{8}$$

阻尼导致振动的周期变长，并且振动的能量以指数方式随时间衰减：（γ 是振幅衰减到 $\frac{1}{e}A$ 的时间

$$E(t) = \frac{1}{2}kx^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} \tag{9}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}kx_0 e \tag{9}$$

受迫振动和共振

外部正弦波形力作用于振子，产生受迫振动，频率由外力决定，振幅取决于外力频率与振子自然频率的关系。

强迫振动的稳态解在考虑阻尼和外部周期性力作用时给出：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m\cos(\omega' t) \tag{10}$$

稳态解表达式为：

$$x(t) = \frac{F_m}{G}\cos(\omega' t - \beta) \tag{11}$$

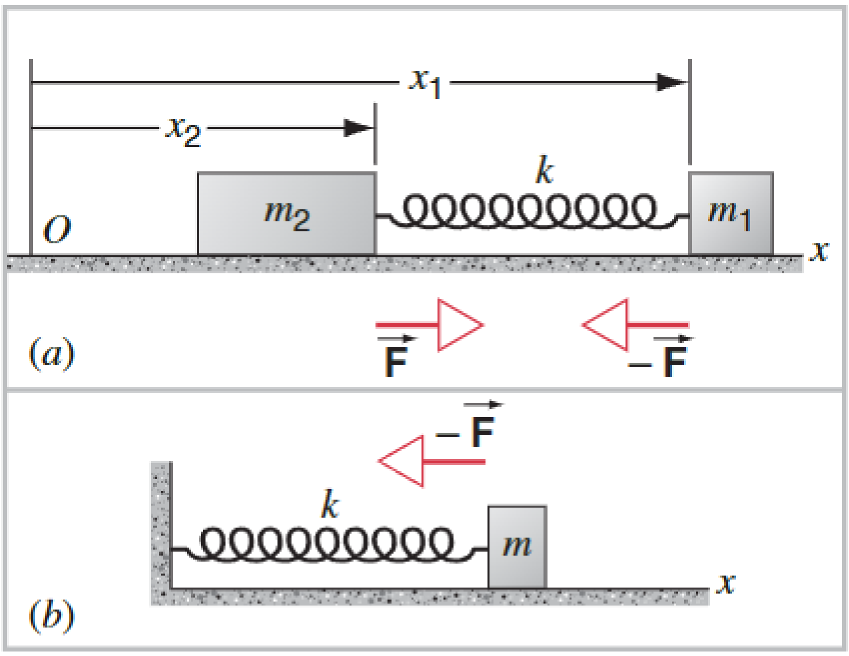
其中，响应强度 G和相位差 β分别由下式给出：

$$G = \sqrt{(m\omega'^2 - k)^2 + (b\omega')^2} \tag{12}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{b\omega'}{G}\right) \tag{13}$$

这表明当外力频率接近系统自然频率时会出现共振现象。

1.3 双体系振动 (2 Body Oscillations)



引入相对位移 $x = x_1 - x_2$和质心位置 x_{cm}来简化问题：

牛顿第二定律应用于两个物体各自的运动方程为：

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx \qquad m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = kx$$

对第一个方程乘以 m_2，对第二个方程乘以 m_1，然后相减：

$$m_1m_2\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -k(x_1 - x_2)(m_1 + m_2) \tag{14}$$

定义“约化质量”：

$$m = \frac{m_1m_2}{} \tag{15}$$

$$\cdots = \frac{\cdots}{m_1 + m_2} \quad (15)$$

2. 波

2.1 本质和分类

本质

原子力的传递，无净位移

分类

1. 粒子运动方向

   粒子的运动与波本身的传播方向垂直：横波。如光波、振动弦。

   粒子的运动与波本身的传播方向平行：纵波。如气体中的声波、弹簧。

   既不平行也不垂直：如水波，水分子做椭圆运动。

2. 维度数

   弹簧上的一维波，水面的二维波，空间源产生的三维波。

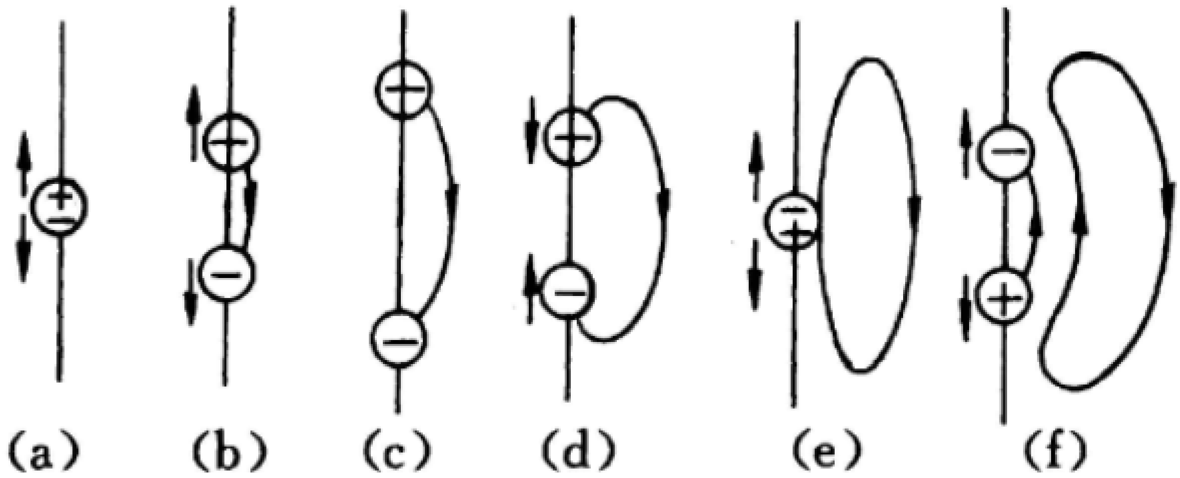
3. 周期性

   最简单的是谐波 (Harmonic Waves)。

4. 波前的形状

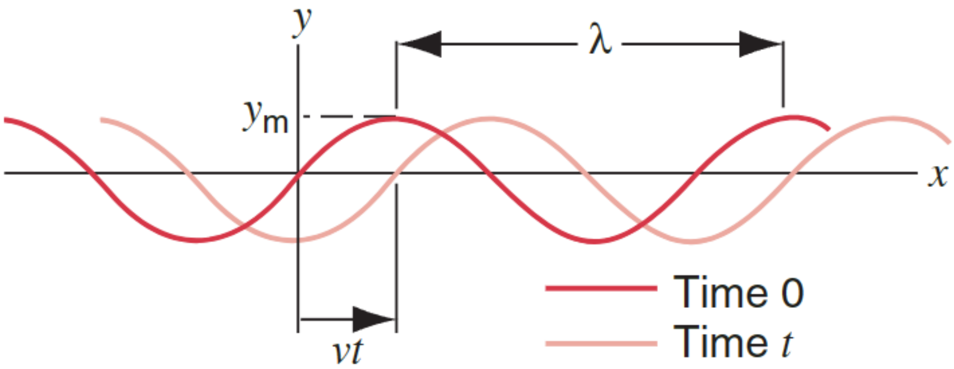
   球面波、平面波。

*电偶极子振动产生电磁波



2.2 行波 (Traveling Waves)

一般形式



波形随着时间在空间中移动，但其形状不随时间改变。

行波的波形可以用一个不随时间变化的函数 $f(x)$ 描述，随时间在空间中传播。

$$y(x,t) = f(x - vt) \tag{16}$$

$y(x,t)$ 表示在任意时间 t 和位置 x 上波的位移， $f(x - vt)$ 表示波形。速度 v 决定了波的传播速度。相速度 dx/dt 描述了波的相位移动速度。

若波向负 x 方向移动，波形表达式为： $y(x,t) = f(x + vt)$ 在这种情况下，相速度 $dx/dt = -v$，表示波相位在负 x 方向的移动速度。

正弦波

波的初始形状：

$$y(x,0) = y_m \sin(kx) \tag{17}$$

波数和波长：

$$k = \frac{\omega}{v} \tag{18}$$

波速、波长和周期：

$$u = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega}{k} \tag{19}$$

波在空间中移动的描述：

$$y(x,t) = y_m \sin[k(x - ut)] \tag{20}$$

Lead or Lag

分析位移项 x 之间的大小关系。

例如：

$y_A(x_A,t) = y_m \sin(kx_A - \omega t - \phi)$ $\qquad$ $y_A(x_A,t) = y_m \sin[k(x_A - \frac{\phi}{k}) - \omega t]$

$y_B(x_B,t) = y_m \sin(kx_B - \omega t)$

则 A 领先于 B $\frac{\phi}{k}$ 的位移。

相速度和群速度

波的传播特性

- 相速度表示单一相位点（如波峰）的传播速度

$$U_{ph} = \frac{\omega}{k} = u \tag{21}$$

- 群速度代表波包（一组波的包络）的传播速度

$$U_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{22}$$

2.3 波速的力学分析

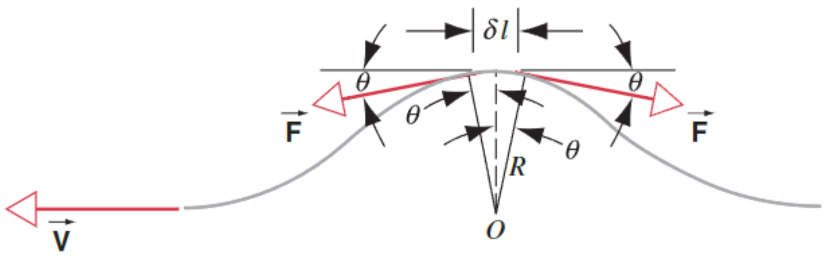
影响因素：弦上张力 F 和单位长度质量 μ

形式：$v \propto \frac{F^a}{\mu^b}$

量纲分析：$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$

故形式为：$v = C\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

数学推导



微元分析，看作圆弧，继续使用小角度近似 $\theta = sin\theta$

对于小段圆弧，受到垂直向下的力：

$$F_y = 2F\sin\theta \approx \frac{F\delta l}{R} \tag{23}$$

所以有：

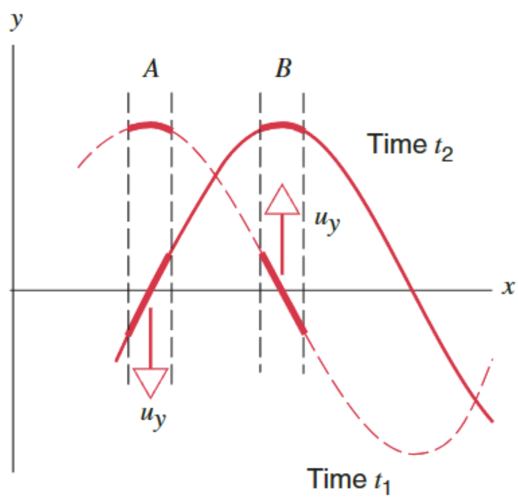
$$F\frac{\delta l}{R} = (\delta m)a_y = (\mu\delta l)\frac{v^2}{R} \tag{24}$$

故:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{25}$$

2.4 波的能量

能量



考虑一个小元素，有

动能：$dK = \frac{1}{2} dm u_y^2 = \frac{1}{2}(\mu dx)[-y_m \omega \cos(kx - \omega t)]^2$

动能变化率：$dK/dt = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 v \cos^2(kx - \omega t)$

势能：$dU = F\left[\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx\right]$

又因为 $dy/dx = -y_m k \cos(kx - \omega t)$，所以

势能变化率：$dU/dt = \frac{1}{2} F v y_m^2 k^2 \cos^2(kx - \omega t)$

因为有：$F = v^2\mu = (\omega/k)^2\mu$

故：

$$dK = dU \tag{26}$$

功率和强度

平均功率：

$$P_{av} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{av} = \mu\omega^2 y_m^2 v \left[\cos^2(kx - \omega t)\right]_{av} \tag{27}$$

由于 cos^2 函数在一个完整周期内的平均值为 1/2，我们可以得到：

$$P_{av} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 v \tag{28}$$

这意味着平均功率是质量密度、角频率的平方、振幅的平方和波速的乘积的一半。

波动强度：单位面积上波动传输的平均功率

$$I = \frac{P_{av}}{A} \tag{29}$$

强度的单位是瓦特每平方米（W/m²），它与波的振幅平方有关。

对于圆形或球形波，振幅随着距离变化而改变，所以强度会随着距离的平方成反比减小：

$$I \propto \frac{1}{r^2} \tag{30}$$

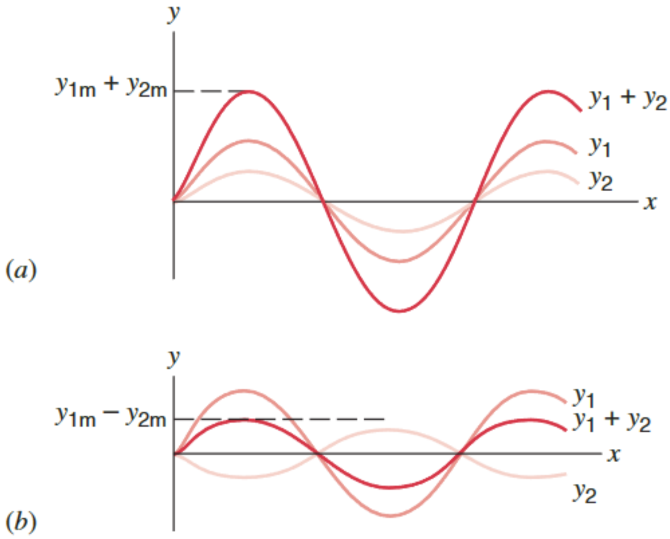
2.5 波的叠加

叠加原理：当几个波在同一点相遇时，任何时刻粒子的位移是各个单独波作用下位移的总和。

适用条件：在弹性介质中传播的机械波，只要恢复力与位移成线性关系，叠加原理就成立。

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \tag{31}$$

2.6 波的干涉



利用叠加原理：

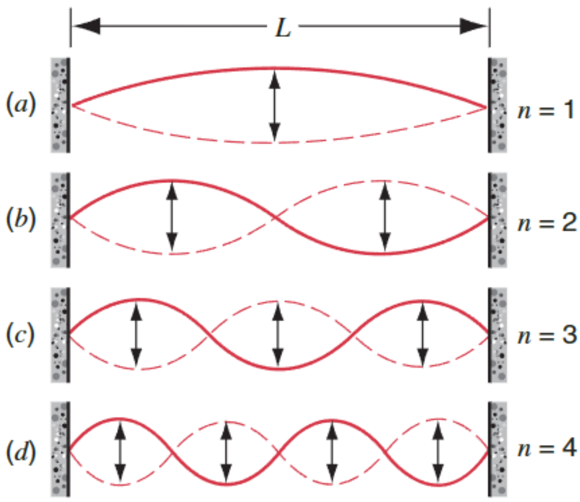
$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_m[\sin(kx - \omega t - \phi_1) + \sin(kx - \omega t - \phi_2)] \tag{32}$$

使用和角公式：

$$y(x,t) = [2y_m \cos(\Delta\phi/2)] \sin(kx - \omega t - \phi') \tag{33}$$

其中，ϕ' 是两个波相位的平均值，$\Delta\phi$ 是相位差。当相位差非常小，这个结果波的振幅几乎等于两个单独波振幅的两倍。当 $\Delta\phi$ 为零时，两个波完全重叠。

2.7 驻波



由两个频率和波长相同，但是在相反方向移动的波通过叠加形成。

当两个波在相同的介质中相遇时，它们可以形成驻波：

$$(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) \tag{34}$$

和差角公式：

$$y(x,t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t \tag{35}$$

这个方程描述了一个在特定点振幅为零（波节），而在特定点振幅最大（波腹）的波动。其中 $kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ （(n) 是整数）时，振幅取最大值。

在两端固定的弦上可以形成不同的驻波模式，对应的波长和频率的关系如下：

- 驻波的波长条件为：
  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$
- 对应的频率条件为：
  $f_n = n\frac{v}{2L}$

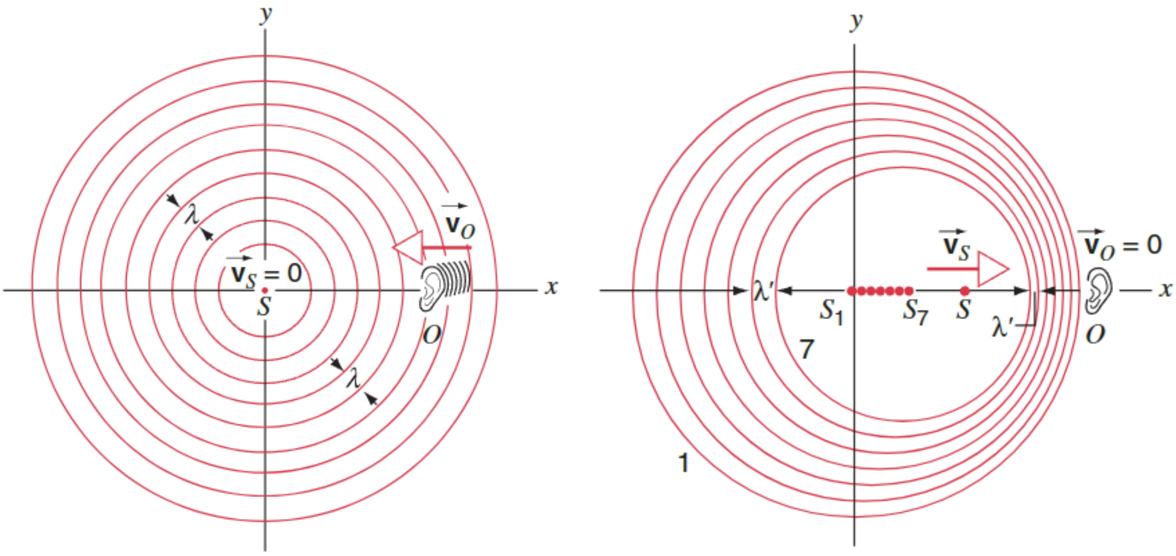
其中 n 表示模式数，v 是波速，L 是弦长。

2.8 声波

Good, almost the same as 2.1-2.7

多普勒效应

当波源与观察者之间存在相对运动时，观察者所测得的波的频率与波源实际发出的频率之间存在差异。



f' 是观察者接收到的频率，f 是波源发射的实际频率，v 是波在介质中的传播速度，v_o 是观察者相对于介质的速度，v_s 是波源相对于介质的速度：

- 观察者不动

  当波源远离观察者时：$f' = f\left(\frac{v}{v+v_o}\right)$ 波源接近观察者时：$f' = f\left(\frac{v}{v-v_o}\right)$

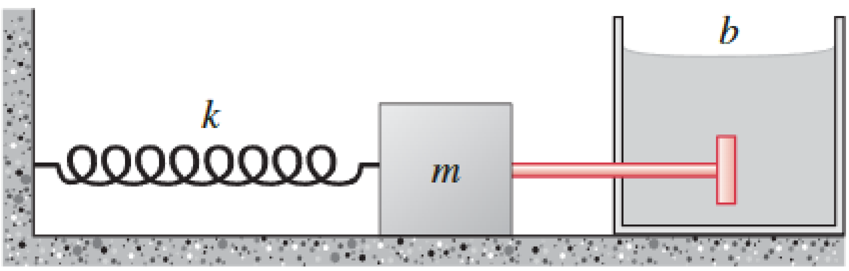
- 波源不动

  当观察者向波源移动时：$f' = f\left(\frac{v+v_o}{v}\right)$ 观察者远离波源时：$f' = f\left(\frac{v-v_o}{v}\right)$

3. 例题

3.1 振动

1. In a damped oscillator, let $m = 250g$, $k = 85N/m$, and $b = 0.070kg/s$. In how many periods of oscillation will the mechanical energy of the oscillator drop to one-half of its initial value?



Solution For small damping, $\omega' \approx \omega$ and the period is

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.25kg}{85N/m}} = 0.34s.$$

At $t = 0$, the initial mechanical energy is $\frac{1}{2}kx_m^2$. According to Eq.8, the energy will have half this value at a time t determined from

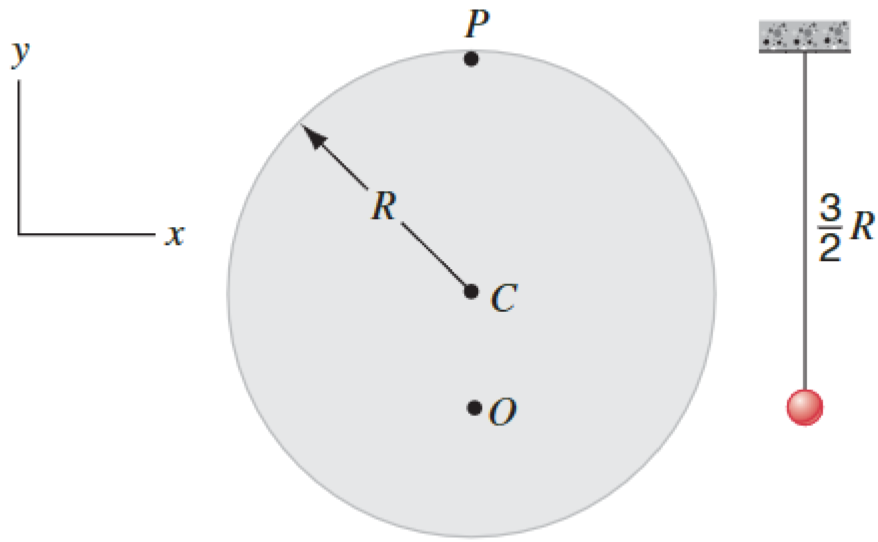
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kx_m^2\right) = \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-2\gamma t}.$$

Solving for t and using $\tau = \frac{2m}{b}$, we obtain

$$t = \frac{1}{2}\tau \ln 2 = \frac{m \ln 2}{b} = \frac{0.25kg \ln 2}{0.070kg/s} = 2.5s.$$

The time t is about $7.4T$; thus about 7.4 cycles of the oscillation are required for the mechanical energy to drop by half.

2. A uniform disk is pivoted at its rim. It is timed for small oscillations and the length of the equivalent simple pendulum.



Solution The rotational inertia of a disk about an axis through its center is $\frac{1}{2}MR^2$, where R is the radius and M is the mass of the disk. The rotational inertia about the pivot at the rim is, using the parallel axis theorem,

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

The period of this physical pendulum, found from Eq.5 with $d = R$, is then

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}},$$

independent of the mass of the disk.

The simple pendulum having the same period has a length

$$L = \frac{I}{MR} = \frac{3}{2}R$$

or three-fourths the diameter of the disk. The center of oscillation of the disk pivoted at P is therefore at O, a distance $\frac{3}{2}R$ below the point of support. Is any particular mass required of the equivalent simple pendulum?

If we pivot the disk at a point midway between the rim and the center, at O, we find that $I = \frac{1}{4}MR^2 + M\left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{3}{4}MR^2$ and $d = \frac{1}{2}R$. The period T is

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4}\frac{MR^2}{Mg(\frac{1}{2}R)}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}},$$

just as before. This illustrates the equality of the periods of the physical pendulum when pivoted about (O) and (P).

3. Naturally occurring chlorine consists of two isotopes: ^{35}Cl, of relative abundance 76% and atomic mass 34.96853 u, and ^{37}Cl, of relative abundance 24% and atomic mass 36.965903 u. (a) What is the reduced mass of a molecule of HCl when it contains ^{35}Cl and when it contains ^{37}Cl? (b) The vibrational frequency of a molecule of HCl is $8.5 \times 10^{13} Hz$. Assuming HCl to behave like a simple two-body oscillator, find the effective force constant k.

   Solution (a) The reduced mass for is found from Eq.15, using the H mass of 1.007825 u:
   $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{(1.007825u)(34.96853u)}{1.007825u+34.96853u} = 0.979593u$. For $H^{37}Cl$ we have similarly
   $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{(1.007825u)(36.965903u)}{1.007825u+36.965903u} = 0.981077u$.

   (b) For the force constant, we obtain

   $k = 4\pi^2 f m^2 = 4\pi^2 (8.5 \times 10^{13} Hz)(0.98u)(1.66 \times 10^{-27} kg/u) = 460 N/m$.

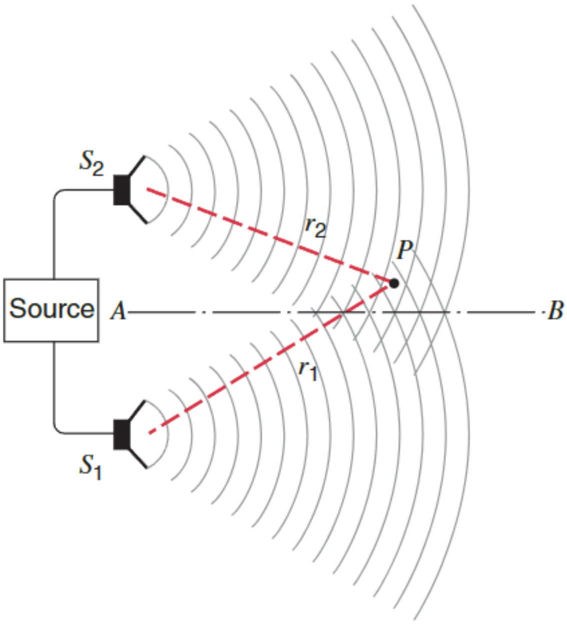
3.2 波

1. Length = 0.4m, $\mu = 0.02 Kg/m$, F=200N,what is the f?

   Solution $u = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{200}{0.02}} = 100(m/s)$

   $f_n = \frac{u}{\lambda} = \frac{nu}{2L} = \frac{100n}{2\times 0.4} = 125n$
   $f_1 = 125Hz$
   $f_2 = 250Hz$
   $f_3 = 375Hz$

2. In the geometry, a listener is seated at a point a distance of 1.2 m directly in front of one speaker. The two speakers, which are separated by a distance D of 2.3 m, emit pure tones of wavelength λ. The waves are in phase when they leave the speakers. For what wavelengths will the listener hear a minimum in the sound intensity?

   Solution The minimum sound intensity occurs when the waves from the two speakers interfere destructively. If the listener is seated in front of speaker 2, then $r_2 = 1.2$ m, and r_1 can be found from the Pythagorean formula,

   $r_1 = \sqrt{r_2^2 + D^2} = \sqrt{(1.2 \text{ m})^2 + (2.3 \text{ m})^2} = 2.6 \text{ m}.$

   Thus $r_1 - r_2 = 2.6 \text{ m} - 1.2 \text{ m} = 1.4 \text{ m}$, and

   we have $1.4 \text{ m} = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots$, corresponding to $\lambda = 2.8 \text{ m}, 0.93 \text{ m}, 0.56 \text{ m}, \ldots$

   Complete destructive interference will not occur at this location, because the two waves arriving at the observation point have different amplitudes, if they leave the speakers with equal amplitudes.