相对论狂想

作者: *金俊一*
日期: *2024-05-13*

重议洛伦兹

对我个人而言,洛伦兹变换并不是一个显然的变换,尤其是在相对论如此反直觉而洛伦兹变换又是如此基本的情况下.在我个人学习相对论的过程中,大多数的困扰都产生于对洛伦兹变换的怀疑,导致我每做一道题就要重新推一次洛伦兹变换,甚至在同一道题里面推许多次.

实际上,对洛伦兹变换的推导过程就是对相对论基本假设的自然梳理,而这一过程可以概括为我们将下面中的左式推导为右式的过程:

$$\begin{cases} x' = f(x, v, t) \\ t' = g(x, v, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \eta x) \end{cases}$$

为了讨论方便,不失一般性地,我们假设在 *S* 系看来,*S'* 系以速率 *v* 沿 *x* 轴正方向做匀速直线运动,同时假设在 *t=t'=0* 的时刻,*S* 系与 *S'* 系的原点重合.

相对性原理

即两个参考系都是惯性系,也就是说,两个参考系相对做匀速直线运动,我们能得到:

$$\begin{cases} x' = f(x, v, t) \\ t' = g(x, v, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f(x', -v, t') \\ t = g(x', -v, t') \end{cases}$$

对于匀速直线运动,我们可以考察固定在 *S'* 系上的某点 *M*,对于 *S'* 系其保持不动；而对于 *S* 系,*M* 随着 *S'* 系一起匀速直线运动,于是我们可以得到:

$$\begin{cases} x' = x'_{t'=0} \\ x - vt = x_{t=0} \end{cases}$$

此时还并不能得到洛伦兹变换是一个线性关系,实际上,只要满足 $f(x, v, t) = \phi(x - vt, v)$ 的式子都能满足相对性原理,为此我们需要引入其他性质

空间均匀性

空间的均匀性,代表两个参考系之间的空间"刻度"应该是均匀的,也即:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x'_1 = \Delta x'_2$$

但这并不代表两个空间之间的"刻度"就应该相同,但不妨设刻度之间的比例为 $\gamma(v)$ 这里的 γ 只与 v 有关,也暗含着一种"时间均匀性",即这一比例还与时间无关,于是我们就有:

$$\frac{\Delta x'_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta x'_2}{\Delta x_2} = \gamma(v)$$

将其作用于 M 与原点间的距离,就可以得到:

$$\frac{x'}{x - vt} = \frac{x'_{t'=0}}{x_{t=0}} = \gamma \Rightarrow f(x, v, t) = \gamma(x - vt)$$

注意,此时我们得到的 γ 仅仅只是关于 v 的函数,但并不能保证 $\gamma = \gamma'$ 也就是不能保证 $\gamma(v) = \gamma(-v)$

空间均向性

空间的均向性要求空间的每个方向都是平权的,在一维情况下,这意味着 $\gamma(v) = \gamma(-v)$,也就是 $\gamma = \gamma'$,因此可以得到:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases}$$

同时,可以注意到:

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma(f + vg) = \gamma(\gamma(x - vt) + vg)$$

$$\Rightarrow g(x,v,t) = \gamma\left(t - \frac{\gamma^2-1}{v\gamma^2}x\right)$$

或者我们可以记作:

$$g(x,v,t) = \gamma(t - \eta x)$$

至此我们可以给出洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \eta x) \end{cases}$$

以及其相应的逆变换:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma(t' + \eta x') \end{cases}$$

光速的再理解

我一直觉得,在多数教材中,光速不变的重要性被低估了.它仿佛被当成一种脑筋急转弯或者公式推导时候的一个抓手,而非真正的本质.

收缩系数

考虑 x 轴方向上的三个参考系 S' 相对于 S 以速度 v 沿 x 轴正方向匀速直线运动,S'' 相对于 S' 以速度 u 沿 x 轴正方向匀速直线运动,此时我们考虑 S'' 与 S 之间的相对速度 w,则有:

$$x'' = \gamma(u)(x' - ut') = \gamma(u)\gamma(v)((1 + u\eta(v))x - (u+v)t)$$

对于 S'' 系的原点,则有:

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ x = wt \end{cases} \Rightarrow w = \frac{u+v}{1+u\eta(v)}$$

同理可得:

$$x = \gamma(v)(x' + vt') = \gamma(v)\gamma(u)((1 + v\eta(u))x'' + (v+u)t'')$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x'' = -wt \end{cases} \Rightarrow w = \frac{v+u}{1+v\eta(u)}$$

联立以上两式,可得:

$$u\eta(v) = v\eta(u)$$

代入 $\eta = \frac{\gamma^2-1}{v\gamma^2}$,则有:

$$\frac{\gamma^2(v)-1}{v^2\gamma^2(v)} = \frac{\gamma^2(u)-1}{u^2\gamma^2(u)}$$

以上对任意的 u 或者 v 都成立,也就意味着这个比值是一个常数,记作 K,可以得出:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-Kv^2}} \\ \eta = Kv \end{cases}$$

注意,这也就意味着,我们实际上 **不用引入光速不变就能推导出完整的洛伦兹公式以及收缩系数**

因果律

因果律指在惯性系 S 中,如果事件 A 是事件 B 的原因,则在 S' 系中,对应的事件 A' 是事件 B' 的原因,不能颠倒.

传统而言,这意味着因要先于果发生,也就是:

$$t_B > t_A \Rightarrow t'_B > t'_A$$

但由于洛伦兹变换,我们可以得到:

$$t' = \gamma(t - \eta x) \Rightarrow t'_B - t'_A = \gamma(t_B - t_A) - \gamma\eta(x_B - x_A)$$

但当 $x_B - x_A > \frac{t_B - t_A}{\eta}$ 时,传统的因果律将被违反.

因果律速度

如果我们将因果的传播速度加以限制,将其上限记作 c,那么因果关系也就是:

$$t_B > t_A + \frac{x_B - x_A}{c}$$

当 $\eta = Kv < 1/c$ 时就能避免因果律冲突,而由于 K 是一个无关于速度的常量,则可以得到:

$$K = 1/c^2$$

其中 c 为假定的因果律速度,也即信息传递的速度上限.同时我们在这里假定了因果律速度也为参考系的速度上限,超过此速度的参考系理论上存在,但其最终将违反因果律.

时空间隔

将一维空间下的因果关系扩充为三维空间下的因果关系,则有:

$$t_B > t_A + \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{c}$$
$$\Rightarrow -c^2(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 < 0$$

若取事件 A 为原点零时刻,则有:

$$s = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 < 0$$

这里的 s 也就是时空间隔,依据其与原点零时刻事件的因果律,其的正负性相对论不变.根据洛伦兹变换,其的相对论变换为:

$$s = s'$$

也就是说,这是一个难得的不变量.

麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \oint E \cdot dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \oint B \cdot dA = 0 \\ \oint E \cdot dl = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \oint B \cdot dl = \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I \end{cases}$$

真空中麦克斯韦方程将退化为:

$$\begin{cases} \oint E \cdot dA = 0 \\ \oint B \cdot dA = 0 \\ \oint E \cdot dl = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \oint B \cdot dl = \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} \end{cases}$$

微分形式下有:

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = 0 \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

于是可以得到:

$$\begin{cases} \nabla^2 E = -\nabla \times (\nabla \times E) = -\nabla \times (-\frac{\partial B}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \nabla^2 B = -\nabla \times (\nabla \times B) = -\nabla \times (\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times E) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \end{cases}$$

化为标准的波动方程则有:

$$\begin{cases}\nabla^2 E - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 B - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0\end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

也就说,光速只与电导率与磁导率有关.

上述的推导,并不能得到 *光速不变* 这是在我们假定 $\mu_0\epsilon_0$ 不是一种介质的属性,而是空间的固有属性之后得到的.而且 **这里得到的 v 与上述的 c 之间没有任何关系**.实际上我们只是假设了 $c = v$,而实验也证明了这一点.

也就是说,光速不变是一条公理,并不能加以证明.或者更严格地说,只是因为麦克斯韦方程组在真空中的解与参考系无关,我们假定了之前引入的常数 c 就是光速.

闵氏空间

物理学原理不是单纯一个推出另一个的关系,而是一个可以互推的等价体系,其的逻辑顺序可以不同,只要保持了推导过程的正确性,那么体系间的等价就不会被破坏.

而采用不同的体系作为出发点,所得到的结论虽然是相同的,但其表述却是不同的,最终可能导致推广的难度有所不同.

下面以闵氏空间与洛伦兹变换为例说明如上观点.

数学补充

大家刚刚还在学线性代数,这不就用上了吗(笑).

爱因斯坦求和约定

在物理研究中对求和的简写,对一上一下的角标进行遍历求和.矩阵的上标为列号,下标为行号,双上标代表对矩阵求逆，则有如下的简写:

$$x^i y_i = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$
$$(AB)_i^j = A_i^k B_k^j$$
$$(g_{ij})^{-1}_{3\times 3} = \left(g^{ij}\right)_{3\times 3}$$

由于物理讨论的是三维空间所以求和时遍历的值默认为 $\{1,2,3\}$ 代表 $\{x,y,z\}$,而在相对论讨论中引入第零维代表时间，也即 $\{0,1,2,3\}$ 代表 $\{t,x,y,z\}$

仿射空间

仿射空间是没有定义标准内积的向量空间,也即其继续满足如下的向量空间性质:

$$x + y = y + x$$
$$(x+y)+z = x+(y+z)$$
$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$
$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$
$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$
$$1x = x$$
$$0x = x$$
$$x + (-x) = 0$$

但是并不涉及内积的定义,而由于长度的定义如下:

$$||x|| = \sqrt{x\cdot x}$$

内积定义的缺失导致长度定义的缺失,此时需要引入度规张量重新定义内积.

度规张量

当我们对一般的点积进行拓展,使得其具有如下形式:

$$x\cdot y = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} g_{ij}x^i y^j = g_{ij}x^i y^j$$

如上，我们使用了爱因斯坦求和作为简化，其中的 *g* 的取值不一定为 *I*,所以将其称为度规张量.对于闵氏空间，其度规张量如下:

$$\begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

几何单位制

由于时空间隔中 *ct* 与 *x* 的地位相同,令 *c=1* 即可将时空间隔改写为:

$$s = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

当然也有令 *ic=1* 使得 *t* 与 *x* 的地位完全对等,但这样的做法实际上只考虑了时空间隔中 *t* 与 *x* 地位上的对等,没有考虑闵氏空间与欧式空间的不同(会被视为邪教),所以此处不加考虑.

转置矩阵

这是接下来要用到的神奇妙妙工具.

定义矩阵 *A* 作为转置矩阵,其几何意义为将向量逆时针转动 θ 角:

$$A = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

显然有 $A^{-1}(\theta) = A(-\theta)$,也就是:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = A^T$$
$$\Rightarrow A^T I A = I$$

闵氏空间到洛伦兹变换

闵氏空间的出发点在于四维时空间隔不变,也即:

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\rho\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma$$

其中 η 为闵氏空间下的度规张量,记变化矩阵为 Λ,则有:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$
$$\Rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

此时求解变换矩阵也就变成了求解如下矩阵方程:

$$\begin{cases} \Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v) \\ \Lambda^T \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

在仅仅考虑一维的情况下,退化为:

$$\begin{cases} \Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v) \\ \Lambda^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

遇到难题了吗?让我们一起呼喊:哦，土豆~~~

$$\begin{cases} A^{-1}(\theta) = A(-\theta) \\ A^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

尝试将二者变成一样的形式,则有:

$$\Lambda^T \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^T I \left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = I$$

则可以假定:

$$A=\begin{bmatrix}i&0\\0&1\end{bmatrix}\Lambda\begin{bmatrix}-i&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\Lambda=\begin{bmatrix}-i&0\\0&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}i&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\Lambda=\begin{bmatrix}-i&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\theta&isin\theta\\isin\theta&cos\theta\end{bmatrix}$$

这里的 Λ 是带虚数部的,但重要的不是其的解,而是这个解的形式,也即若将其写为:

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\gamma&-\gamma\beta\\-\gamma\beta&\gamma\end{bmatrix}$$

就可以得到:

$$\gamma^2(1-\beta^2)=1$$
$$\Rightarrow\Lambda=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}&-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}&\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{bmatrix}$$

此时,如果我们将 $\beta=\frac{v}{c}$ 带入,即可发现这一变化就是洛伦兹变化,故二者等价.

闵可夫斯基图

为了讲明白这个鬼东西我真的是.

双曲函数

有请大名鼎鼎的欧拉公式:

$$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$$

的看起来卵用没有的变体:

$$e^{\theta}=cosh\theta+sinh\theta$$

仿照三角函数我们可以定义这样的一组函数:

$$\begin{cases}sinh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\end{cases}$$

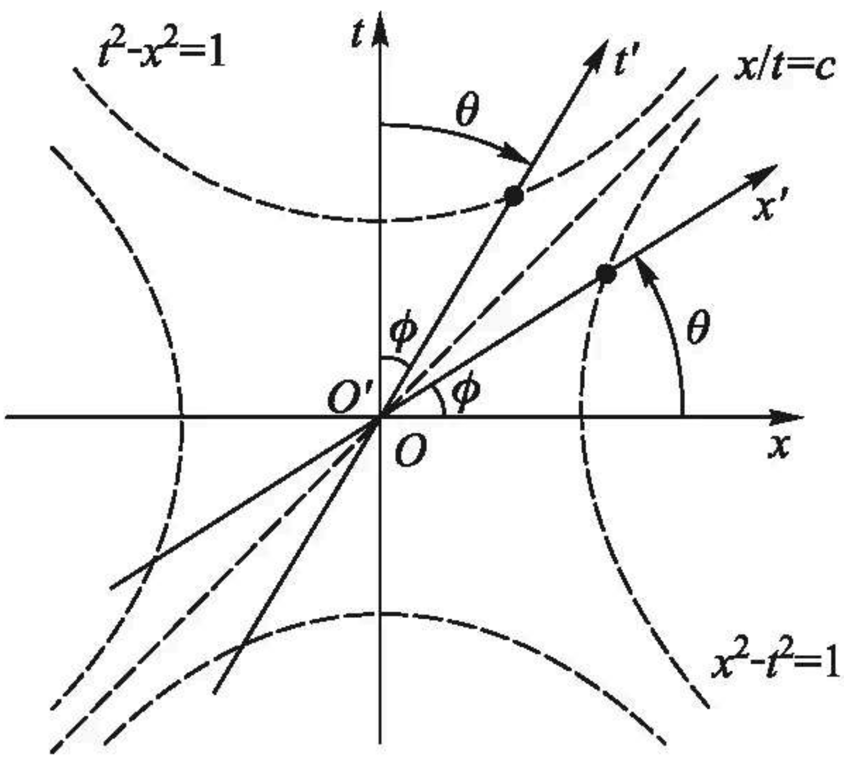
引入双曲函数是为了其的一个性质 $cosh^2\theta-sinh^2\theta=1$,那么也就可以得到:

$$\Lambda=\begin{bmatrix}cosh\theta&-sinh\theta\\-sinh\theta&cosh\theta\end{bmatrix},\beta=tanh\theta$$

所以,在欧式空间中角度量 $sin\theta,cos\theta$ 所做的事情都需要用 $sinh\theta,cosh\theta$ 来做,这会导致一些奇怪的现象,比如直角三角形的斜边比直角边要更短.

时空图

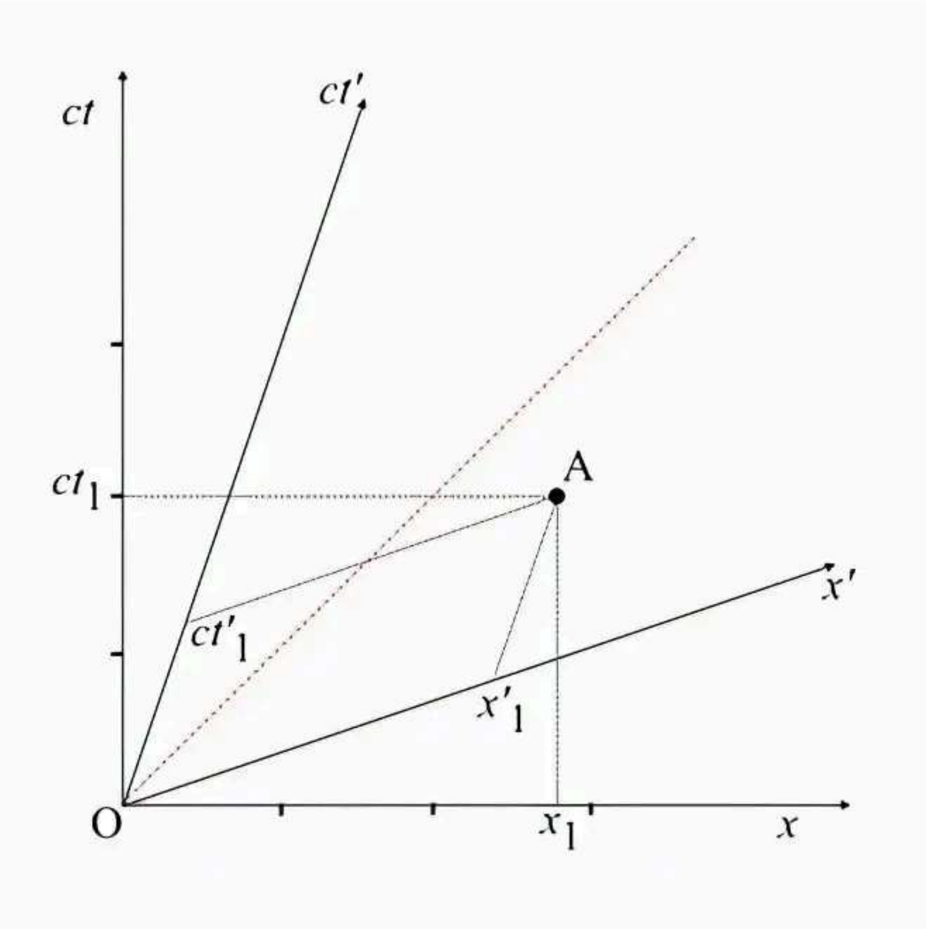
由于要引入时间维,所以只考虑 *x* 和 *t*,如下图所示:



上述图中元素的具体含义如下:

1. *x-t* 坐标轴
   S 参考系在 *S* 参考系下的坐标轴
2. *x/t = c*
   光速不变,可以理解为 *v = c* 匀速运动物体的世界线
3. *x'-t'* 坐标轴
   S' 参考系在 *S* 参考系下的坐标轴
4. *t^2 - x^2 = 1*
   类时时空间隔等间隔线
5. *x^2 - t^2 = 1*
   类空时间间隔等间隔线
6. θ
   前文所述的 θ 注意这里的 θ 的值和图中角度的值并不是一样
7. ϕ
   坐标系夹角的值 $tan\phi = \beta, sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$

下图是一个事件投影的示意图:



四维矢量

既然都把闵氏空间讲得这么明白了,那不搞点四维矢量相关的东西就真浪费了.

再议洛伦兹

从先前的推导中,我们可以重新定义洛伦兹变换为满足如下:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

方程的变换即为洛伦兹变化,比如参考系的相对速度是斜着的,那和原先的结果不一样,但由于满足刚才的方程,所以仍然是一种洛伦兹变换.

相对论不变量

在参考系变换过程中满足形如 $dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}$ 的洛伦兹关系的矢量也就是四维矢量,或者逆变矢量,同时称 $x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu}$ 为协变矢量.(一个角标在上,一个角标在下)

由上述关系 $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ 就可以得到:

$$A'^{\mu} B'_{\mu} = A^{\mu} B_{\mu}$$

也即逆变矢量和协变矢量相乘为相对论不变量,也可以叫做四维标量一般记作 τ,上述求和关系不同于闵氏空间下的点乘,所以被重新取名为缩并.

四维矢量的性质

四维矢量包含如下两条性质:

1. 与四维标量相乘仍为四维矢量
   记 $A^{\mu} = \tau x^{\mu}$ 则有 $A'^{\mu} = \tau x'^{\mu} = \tau \Lambda x^{\mu} = \Lambda A^{\mu}$ 得证
2. 对四维标量求导仍为四维矢量
   记 $A^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ 则有 $A'^{\mu} = \frac{dx'^{\mu}}{d\tau} = \frac{d\Lambda x^{\mu}}{d\tau} = \Lambda \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \Lambda A^{\mu}$ 得证