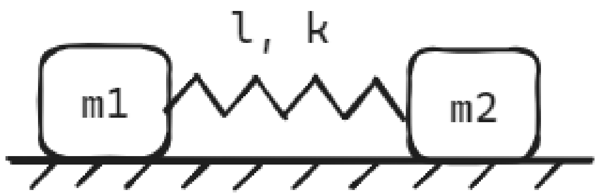
sp24 春夏普通物理 I 辅学

期末复习练习题

2024.06.02

1. 两个质量分别为 m_1 和 m_2 的光滑物块由一个弹性系数为 k 、自然长度为 l 的无质量弹簧连接，它们的运动被限制在 x 方向的一维直线上.



   (a) 当系统受到扰动时，m_1 和 m_2 的位移分别为 x_1 和 x_2，其正方向为向右. 以 $F_i = m_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}$ 的形式写出每个块的运动方程.

   (b) 假设 x_1 和 x_2 的解为 $x_i = x_{i0}\cos(\omega t+\varphi)$. 导出 x_{10} 和 x_{20} 的方程，它们是 m_1 和 m_2 的振幅. 求解特征频率 ω，并为每个振动模式绘制 x_{10} 和 x_{20} 的示意图.

   (c) 假设第三个具有相同质量 m_1 和初始速度 v_0 的块体从左侧移动，在时间 $t=0$ 时与块体 m_1 发生弹性碰撞. 碰撞后，m_1 和 m_2 将作为时间 t 的函数运动. 在初始条件 $x_1=0, x_2=0; v_1=v_0, v_2=0$ 的情况下，将 (b) 中振动模式叠加. 确定每个块的振幅 x_{i0}，求解相位 φ.

解：

(a)

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2-x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1)$$

(b) x_{10} 与 x_{20} 的方程为

$$\begin{cases}(m_1\omega^2-k)x_{10}+kx_{20}=0\\ kx_{10}+(m_2\omega^2-k)x_{20}=0\end{cases}$$

求解久期方程

$$\begin{vmatrix}m_1\omega^2-k & k\\ k & m_2\omega^2-k\end{vmatrix}=0$$

即

$$(m_1\omega^2-k)(m_2\omega^2-k)-k^2=0$$

解得

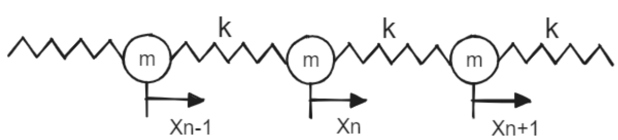
$$\begin{cases}\omega_1=\sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}\\ \omega_2=0\end{cases}$$

两个振动模式分别对应：① $m_1x_{10}+m_2x_{20}=0$. ② $x_{10}-x_{20}=0$.

(c)

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{m_2v_0}{(m_1+m_2)\omega_1}\cos\left(\omega_1 t-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{m_1v_0t}{m_1+m_2}\\ x_2=-\dfrac{m_1v_0}{(m_1+m_2)\omega_1}\cos\left(\omega_1 t-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{m_1v_0t}{m_1+m_2}\end{cases}$$

2. 质量为 m 的一系列小球用劲度系数为 k 的相同的小弹簧等间隔（间隔为 d）地连成一排. 当左端小球作角频率为 ω 的左右简谐振动时，此振动将自左向右逐一传播，使各小球相继作同频率、同幅度的振动，求振动状态的传播速度.（设 $\omega^2 \ll k/m$）



解：

由于对称性，小球振动的频率和振幅均相同

$$x_n=A\cos(\omega t-\varphi_n).$$

唯一的区别就是各小球的相位 φ_n 不同. 而由于其平移对称，各小球间的相位差恒定：$\varphi_{n+1}-\varphi_n \equiv \Delta\varphi$. 对于 n 号小球，受力方程为

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n-1}-x_n)+k(x_{n+1}-x_n).$$

解得

$$\cos\Delta\varphi = 1-\frac{m\omega^2}{2k}\approx 1-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2}.$$

则有

$$\Delta\varphi=\sqrt{\frac{m}{k}}\omega.$$

$$\Rightarrow v=\frac{d}{\Delta\varphi/\omega}=\frac{k}{m}d.$$

3. 考虑一个双星系统，一个质量为 m 的行星围绕质量为 M 的恒星作圆周运动（$M \gg m$），初始角动量为 L_0.

   (a) 讨论行星轨道的稳定性.

   (b) 若轨道稳定，给行星一个径向微扰，求解行星的径向微振动频率.

解:

(a) 守恒量:

$$\begin{aligned} L_0 &= mr^2\dot{\theta} \\ E_0 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2-\frac{GMm}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}. \end{aligned}$$

写出有效势能:

$$V_{eff}=\frac{L_0^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}.$$

平衡位置:

$$V'_{eff}=0\Rightarrow r_0=\frac{L_0^2}{GMm^2}.$$

稳定性判断:

$$V''_{eff}(r_0)=\frac{GMm}{r_0^3}>0.$$

因此，行星轨道总是稳定的.

(b) 由 V_{eff} 的极小值点附近展开：

$$V_{eff}(r) = V_{eff}(r_0) + \frac{1}{2}V''_{eff}(r_0)(r-r_0)^2.$$

由此得到径向微振动频率：

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''_{eff}(r_0)}{m}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}} = \frac{G^2M^2m^3}{L_0^3}.$$

4. 一艘宇宙飞船以 $0.8c$ 的速度于中午飞经地球，此时飞船上和地球上的观察者都把自己的时钟拨到 12 点.
   (a) 按飞船上的时钟于午后 12 点 30 分飞船飞经一星际宇航站，该站相对地球固定，其时钟指示的是地球时间，试问按宇航站的时钟飞船何时到达该站?
   (b) 试问按地球系坐标测量，宇航站离地球多远?
   (c) 于飞船时间午后 12 点 30 分从飞船向地球发送无线电信号，试问地球上的观察者何时（按地球时间）接收到信号?
   (d) 若地球上的观察者在接收到信号后立即发出应答信号，试问飞船何时（按飞船时间）接收到应答信号?

解:

(a)

$$t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{\beta}{c}x'_0) = \gamma t'_1 = \frac{5}{3}\cdot 30 = 50 \text{ min}.$$

地球系中在 12 点 50 分到达.

(b)

$$x_1 = t_1\beta c = 40 \text{ 光分}.$$

宇航站离地球 40 光分.

(c)

$$t_2 = t_1 + \frac{x_1}{c} = 90 \text{ min}.$$

地球系中在 1 点 30 分接收到信号.

$$t_2' = \gamma(t_2 - \frac{\beta}{c}x_0) = \gamma t_2 = \frac{5}{3}\cdot 90 = 150\ \text{min}.$$

飞船认为在飞船系中地球在 2 点 30 分接收到信号.

(d)

$$x_2' = \gamma(x_0 - \beta c t_2) = -\gamma\beta c t_2 = -\frac{4}{3}\cdot 90 = -120\ \text{光分}.$$

$$\Delta t' = |\frac{x_2'}{c}| = 120\ \text{min}.$$

$$t_3' = t_2' + \Delta t' = 270\ \text{min}.$$

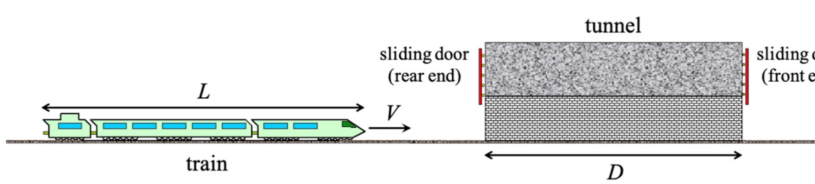
飞船系中飞船在 4 点 30 分接收到应答信号.

地球系中

$$t_3 = \gamma(t_3' + \frac{\beta}{c}x_0') = \gamma t_3' = 450\ \text{min}.$$

地球系中认为飞船在 7 点 30 分接收到应答信号.

5. 考虑一列火车以恒定的速度 V 在 x 方向的直线轨道上行驶，并通过隧道. 列车系中测量的列车长度为 L ，以隧道系测量的隧道长度为 D. 假设 $L > D$. 定义 (ct, x) 为隧道系的时间和空间坐标，(ct', x') 为列车系的时间和空间坐标. x 和 x' 的方向相同.



(a) 地面系（即隧道系）的观察者发现火车的长度小于隧道的长度，则火车速度至少为多少?

(b) 假设隧道后端位于 $x = 0$ 处，并设定列车后端到达隧道后端时 $t = t' = 0$. 以 x 坐标为横轴，ct 坐标为纵轴，绘制闵氏图. 此外，请在图中指明 L 和 D.

(c) 当列车后端到达隧道后端时，在隧道系中隧道的前后端滑动门同时关闭，这两个事件分别用 F_{close} 和 R_{close} 表示. 然后，当列车前端到达隧道前端时，轨道系中两门同时打开，分别用 R_{open} 和 F_{open} 表示.
在闵式图中标出这四个事件，并列出列车系中的观察者观察到这四个事件的先后顺序.

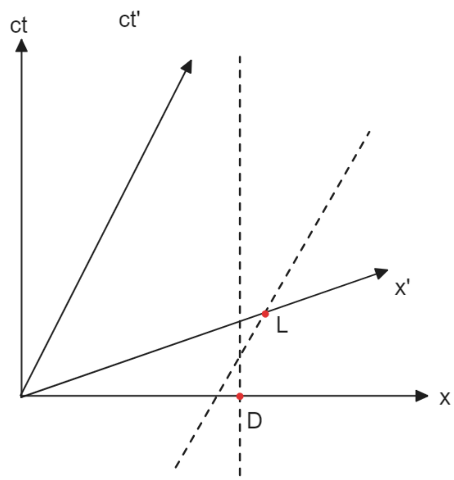
(d) 考虑一种改进情况，当列车前端到达隧道前端滑动门时，列车突然（即列车系中瞬间）停止. 导出隧道系中列车前端停止的时间 $t = t_f$，并绘制列车在隧道系中的长度关于时间的函数图像.

解:

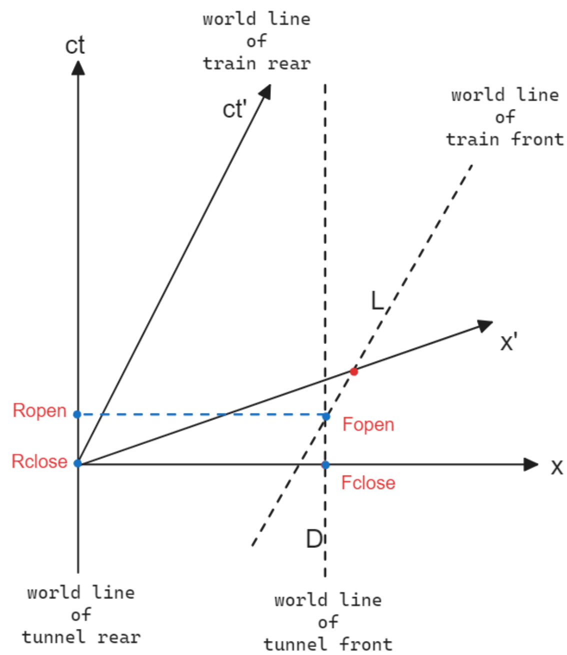
(a)

$$L\sqrt{1-\beta^2} < D \Rightarrow \beta > \sqrt{1-\frac{D^2}{L^2}}.$$

(b) 两条虚线分别为隧道头的世界线（D）与列车头的世界线（L）.



(c) 事件发生先后顺序：$F_{close} \to F_{open} \to R_{close} \to R_{open}$.

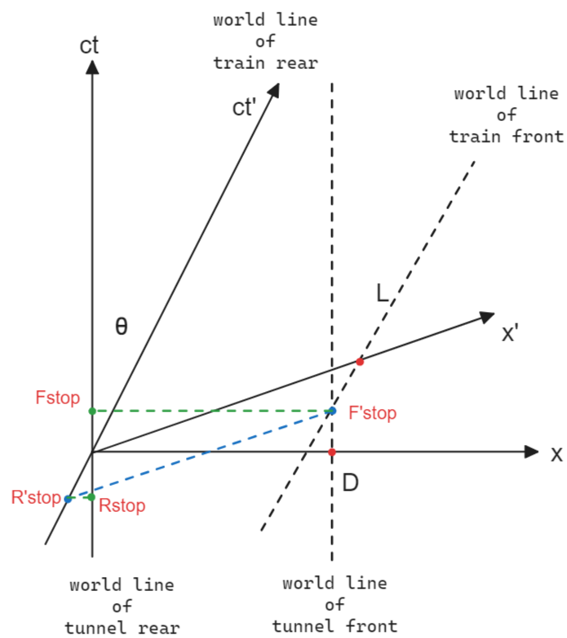

world line
of
train rear
ct
ct'
world line
of
train front
L
x'
Ropen
Fopen
Rclose
x
Fclose
D
world line
of
tunnel rear
world line
of
tunnel front

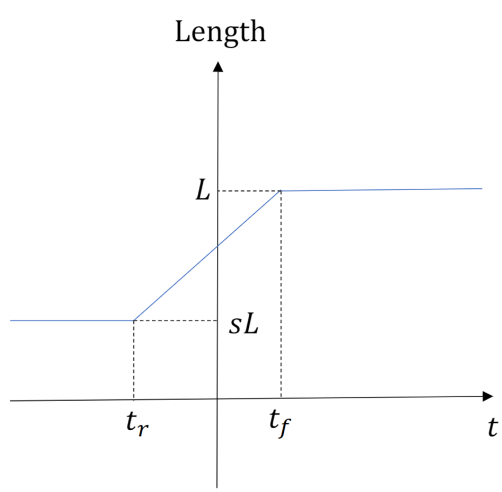
(d)

$$\tan\theta = \beta$$

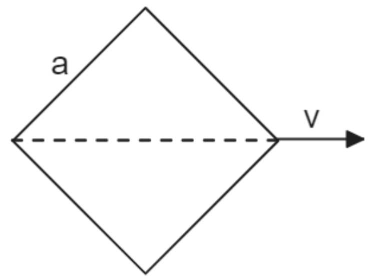
$$ct_f = (D - sL)\cot\theta = (D - L\sqrt{1-\beta^2})\cot\theta$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{D - L\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}{V}.$$

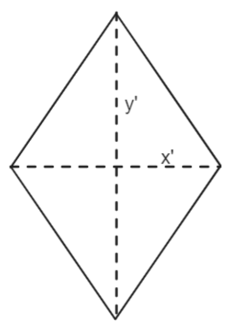




6. S 系有一静止时各边长为 a 的正方形框. 若使该框沿其对角线方向匀速运动，速度大小为 v，试求 S 系中该框的形状.

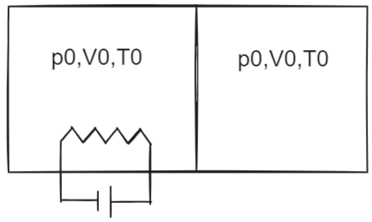


解:



$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sqrt{1-\beta^2}$$
$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

7. 用绝热壁作成一圆柱型容器, 中间放置一无摩擦的绝热活塞. 活塞两侧充有等量的同种气体，初始状态为 p_0, V_0, T_0. 设气体定体热容量 C_V 为常量，$\gamma = 1.5$.
将一通电线圈放到活塞左侧气体中，对气体缓慢地加热，左侧气体膨胀的同时通过活塞压缩右方气体，最后使右方气体压强增为 $\frac{27}{8} p_0$. 问:
   (a) 活塞对右侧气体做的功?
   (b) 右侧气体终温?
   (c) 左侧气体终温?



(d) 左侧气体吸收了多少热?

解:

(a) 绝热方程为

$$pV^{\gamma} = const.$$

推出右侧气室的体积

$$V_2 = \frac{4}{9}V_0.$$

温度

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{p_0V_0} \cdot T_0 = \frac{3}{2}T_0.$$

由于绝热，活塞对右侧气体做功等于右侧气体的内能变化，则

$$W = C_V(T_2 - T_0) = 2R \cdot \frac{1}{2}T_0 = RT_0.$$

(b) 右侧气体终温为 $T_2 = \frac{3}{2}T_0$.

(c) 左侧气体压强 $p_1 = \frac{27}{8}p_0$，体积 $V_1 = 2V_0 - V_2 = \frac{14}{9}V_0$.
因此有温度

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{p_0V_0} \cdot T_0 = \frac{21}{4}T_0.$$

(d) 左侧气体吸收的热量为

$$Q = C_V(T_1 - T_0) + W = \frac{19}{2}RT_0.$$

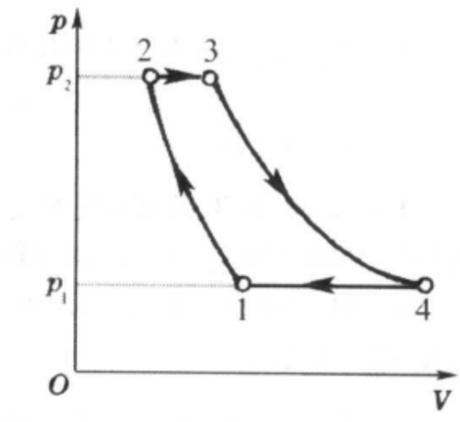
8. 设燃气涡轮机内工质进行如图循环，其中 $1 \to 2, 3 \to 4$ 是绝热过程，$2 \to 3, 4 \to 1$ 是等压过程. 证明循环的效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2},$$

又可写作

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon_p^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

式中 $\varepsilon_p = p_2/p_1$. 设工质为理想气体，C_p 为常量.



解:

$$\begin{aligned}\eta = \frac{W}{Q_H} &= 1 - \frac{Q_C}{Q_H}\\ &= 1 - \frac{C_p(T_4 - T_1)}{C_p(T_3 - T_2)}\\ &= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.\end{aligned}$$

有绝热方程

$$p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = const.$$

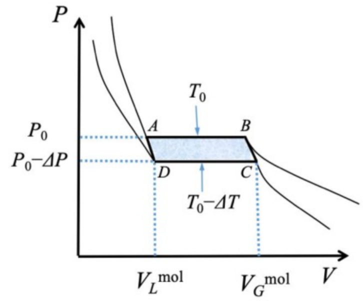
因此

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = \varepsilon_p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon_p^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

9. 对于范德瓦耳斯气体，其状态方程意味着在临界温度 T_c 以下，液态和气态之间会发生相变：在 $P-V$ 相图中，温度 T_o 给定时 $T_o < T_C$，其等温线并不是单调递减的，而是在某个区域内关于 V 的恒定函数（近似结果）. 该区域对应于从液态到气态的相变（体积从 V_L^{mol} 变为 V_G^{mol}），该相变的摩尔潜热为 L^{mol}. 假设我们使用 1 摩尔的这种范

德瓦耳斯气液混合物作为介质，在高温 T_o 和低温 $T_o - \Delta T$ 之间进行卡诺循环，这两个循环由两个绝热过程 $D \to A$ 与 $B \to C$ 连接. 压强变化为 $P_0 \to P_0 - \Delta P$.



(a) 请说明卡诺循环中 $A \to B, B \to C, C \to D, D \to A$ 每个过程的传热和做功. 在此，我们假设 $B \to C, D \to A$ 的体积变化是可忽略的.

(b) 计算该卡诺循环对环境做的总功，并用 $\varepsilon = W/Q_H$ 表示其效率，其中，W 和 Q_H 分别是循环中输出的总功和高温下输入的热量.

(c) 对于卡诺热机，有效率为 $\varepsilon = 1 - \frac{T_C}{T_H}$，则对以上范德瓦尔斯气液混合物，证明克拉珀龙方程：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{L^{mol}}{T(V_G^{mol} - V_L^{mol})}.$$

(d) 根据克拉珀龙方程，解释为何水的沸腾温度会随着气压减少而下降.

解：

(a) $A \to B$、$C \to D$ 为相变过程，$B \to C$、$D \to A$ 为温度略微改变的过程.

$A \to B$： 吸热 L^{mol}，做功 $P_0(V_G^{mol} - V_L^{mol})$.

$B \to C$： 放热 0，做功 0.

$C \to D$： 放热 L^{mol}，做功 $(P_0 - \Delta P)(V_L^{mol} - V_G^{mol})$.（事实上由于温度下降，此时摩尔潜热会略有减小.）

$D \to A$： 吸热 0，做功 0.

(b) 对外做功

$$W = \Delta P(V_G^{mol} - V_L^{mol}).$$

效率

$$\varepsilon = \frac{\Delta P(V_G^{mol} - V_L^{mol})}{L^{mol}}.$$

(c)

$$
\begin{aligned}
1-\frac{T_0-\Delta T}{T_0} &= \frac{\Delta P(V_G^{mol}-V_L^{mol})}{L^{mol}} \\
\frac{\Delta P}{\Delta T} &= \frac{L^{mol}}{T_0(V_G^{mol}-V_L^{mol})} \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} &= \frac{L^{mol}}{T(V_G^{mol}-V_L^{mol})}.
\end{aligned}
$$

(d) 明显有 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}>0$，则气压下降，相变温度下降，沸点下降.