振动与波

NSX

2025 年 4 月 11 日

1 *Equilibrium* (平衡)

回忆高中物理，我们知道，振动的最基本形式——简谐振动的一大特点便是具有平衡位置。因此，在开始正式讨论振动与波之前，我们先来研究一下物体平衡的条件。

平衡的定义如下：

- *Equilibrium* (平衡): The condition of a system when neither its state of motion nor its internal energy state tends to change with time.

通过前面章节力学部分的学习，我们知道，上面的定义可以写作以下两种形式：

$$\begin{cases} \vec{F}_{net} = 0 \\ \vec{\tau}_{net} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p} = Const \\ \vec{L} = Const \end{cases}，\text{或} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\vec{x}} = 0 \end{cases}$$

让我们分别观察两个等价的表达式，它们分别从**受力**与**能量**的角度描述了何为“平衡”。

先从受力的角度。我们知道，物体的所受的力矩大小与转轴位置有关。那么，一个自然的问题是，平衡的物体重新选取转轴位置后，总力矩依旧为零吗？答案是肯定的。

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \displaystyle\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \end{cases} \Longrightarrow \sum_i \vec{\tau}_{i,O'} = 0, \text{ for any other point } O'.$$

特别地，对于 $\vec{p} = 0, \vec{L} = 0$ 的情况，我们称之为 *Static equilibrium* (静态平衡)——显然，这与坐标系的选取有关。

而从能量的角度，能量关于时间一阶导为零，根据其二阶导的符号，我们又可将其分为以下三种情况：

- *Stable equilibrium* (稳定平衡): $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\vec{x}} = 0, \dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\vec{x}^2} < 0$
- *Unstable equilibrium* (不稳定平衡): $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\vec{x}} = 0, \dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\vec{x}^2} < 0$
- *Neutral equilibrium* (随遇平衡): $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\vec{x}} = 0, \dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\vec{x}^2} = 0$

直观上讲，*Stable equilibrium* (稳定平衡) 位置势能取最小值，好比是一个落入坑中的小球，在施以一定干扰的情况下是“稳定”的；*Unstable equilibrium* (不稳定平衡) 位置势能取最大值，好比是一个停留在穹顶的小球，虽然静止，但一旦受到外力干扰便会打破其平衡的状态；而 *Neutral equilibrium* (随遇平衡) 可以理解为物体的平衡状态不会被位移所改变，例如一根横躺的圆柱，无论滚到哪里都可以保持静止。

2 *Oscillations* (振动)

2.1 *Simple Harmonic Motion (SHM)* (简谐运动)

简谐运动想必大家已经非常了解了，下面我们用另外一种方式引入。

考虑一个 *Stable equilibrium* (稳定平衡) 的物体，在平衡点 $\vec{x}_0$ 对 U 做关于 $\vec{x}$ 的 *Taylor expansion* (泰勒展开)

$$\begin{aligned}U(\vec{x}) &= U(\vec{x}_0) + \cancel{\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\vec{x}}\right|_{\vec{x}_0}(\vec{x}-\vec{x}_0)} + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\vec{x}^2}\right|_{\vec{x}_0}(\vec{x}-\vec{x}_0)^2 + \cdots \\ &\approx U(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}k(\vec{x}-\vec{x}_0)^2 \ , k = \left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\vec{x}^2}\right|_{\vec{x}_0} \ (\vec{x} \sim \vec{x}_0)\end{aligned}$$

而我们又知道 $\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\vec{x}}$，于是得到：

$$\vec{F} = -k(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

如果将 k 近似看做一个正常数，显然，这便与我们高中接触的简谐运动的定义相同。由此可见，简谐运动实际上是一种具有更为广泛意义的运动。

下面我们给出简谐运动的完整定义：

- *Simple harmonic motion* (简谐运动): The motion of an object whose acceleration of the system, and therefore the net force, is proportional to the displacement and acts in the opposite direction of the displacement.

利用牛顿第二定律，我们可以列出以下微分方程：

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

解这个微分方程，得到：

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + x_0$$

其中

- A: *Amplitude* (振幅), the maximum displacement from the equilibrium position.
- ω: *Angular frequency* (角频率), which identically equals to $\sqrt{\frac{k}{m}}$.
- φ: *Initial phase angle* (初相角), which determines the initial position of the motion at $t = 0$.

我们再定义两个物理量：

- T: *Period* (周期), the time taken for one complete cycle of motion.
- f: *Frequency* (频率), the number of cycles per unit time.

则有以下关系：

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

而利用 $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + x_0$，我们可以进一步得到：

$$\begin{cases} v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) & = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) & = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi) \end{cases}$$

两个小结论：

- 偏离平衡位置的位移与加速度符号相反。
- 位移、速度与加速度周期一致。

下面，我们来讨论简谐运动物体的机械能：

$$\begin{aligned} K = \quad \frac{1}{2}mv^2 \quad &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\ U = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

于是

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

这说明简谐运动系统总机械能守恒，且振幅大小的平方与总机械能大小正相关[1]。

对动能与势能的表达式稍加变形：

$$K = \frac{1}{2}kA^2\frac{1-\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}$$
$$U = \frac{1}{2}kA^2\frac{1+\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}$$

即得到两者的周期均为运动周期的一半。

2.2 *Expressing SHM With Uniform Circular Motion* (用匀速圆周运动表达简谐运动)

看到三角函数，我们自然会想到圆。简谐运动与匀速圆周运动之间的关系是非常直接的。

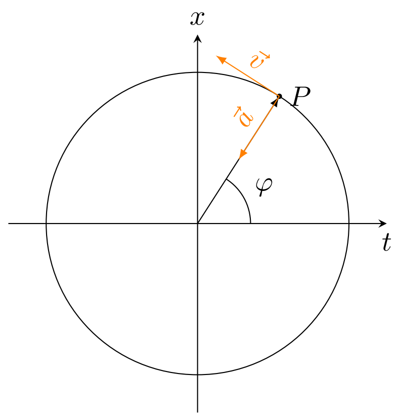


图 1: 圆周运动示意图

考虑 P 点在 x 轴上的投影，显然有 $x = Acos(\omega t + \varphi)$。于是我们知道，每一个简谐运动都可以与一个圆周运动相对应。这种思想将会在后续内容中有所体现。

2.3 *Damped Oscillations* (阻尼振动)*

下面我们来稍微超越一下高中范围。我们知道，生活中难以存在真正的简谐运动的一大原因是阻力的存在。我们先考虑一种最普遍的阻力——流体阻力。在低速条件下，流体阻力的大小可以由下式表达：

$$F_d = -bv^2$$

其中 b 被称为阻尼系数，是一个由物体形状与流体性质决定的量。直观理解，如果阻尼不大，系统的运动方式应当接近简谐运动，但是随时间会有能量的损耗；而阻尼很大时，系统可能就不能震荡了。

与解决简谐运动问题一样，我们用牛顿第二定律列出微分方程：

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b\dot{x}$$

解这个微分方程，会发现它的解实际上需要分为三类。

按照物理图像的不同，我们分别称它们为：*Underdamped* (欠阻尼)，*Overdamped* (过阻尼)，*Critically damped* (临界阻尼)。

我们定义 *Natural angular frequency* (固有角频率) 为 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$，然后有解：

- *Underdamped* (欠阻尼)($\frac{k}{m} < (\frac{b}{2m})^2$):

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}t + \varphi) + x_0$$

[1]不知大家此时有没有想到 Parseval 恒等式呢

[2]实际上，流体阻力公式应为 $F_d = \frac{1}{2}\rho v^2 C_d A$，课内要求的仅仅是解决低速情况。针对更准确的表达式，我们将在补充材料中讨论。

- *Overdamped* (过阻尼)($\frac{k}{m} < (\frac{b}{2m})^2$):

$$x = A_1 \exp\left[\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b}{2m} - (\frac{k}{m})^2}\right) t\right] + A_2 \exp\left[\left(-\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b}{2m} - (\frac{k}{m})^2}\right) t\right] + x_0$$

- *Critically damped* (临界阻尼)($\frac{k}{m} = (\frac{b}{2m})^2$):

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\frac{b}{2m}} + x_0$$

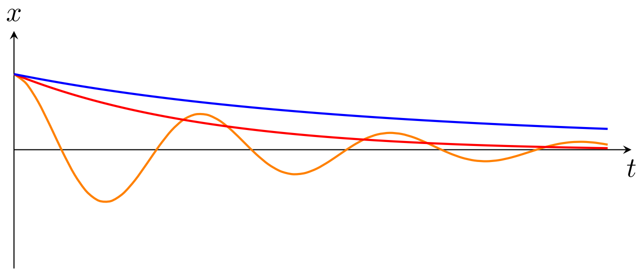


图 2：三种阻尼振动

如果阻尼较小，物体会振荡，且随着能量被阻力消耗，振幅会逐渐减小。其极限情况便是“临界阻尼”。如果阻尼很大，质点在运动时不会振荡，而是会慢慢返回到平衡位置。

有趣的是，能量耗散最快的情况是临界阻尼。一种理解方式是考虑两种极限情况：阻尼接近零时，系统接近于简谐运动，能量几乎不消耗；阻尼无穷大时，系统接近静止，能量同样几乎不消耗。临界阻尼的这种特性被应用于电流表的阻尼设计中。

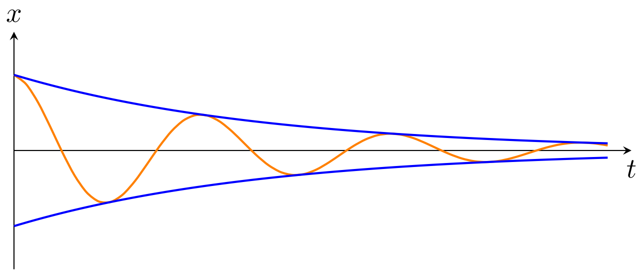


图 3: 欠阻尼的包络线

对于欠阻尼的情况，还可以将其看作是能量的指数衰减与周期运动的叠加。相对于无阻尼的情况，体系的周期会增大。

2.4 *Forced Oscillations* (受迫振动)

下面让我们转向另一类常见的振动形式：

- *Forced Oscillations* (受迫振动): The condition of system when it is driven by a periodic force that is external to the oscillating system.

在阻尼运动的基础上，我们设驱动力的表达式为 $F_d = F_{ext} \cos \omega t$。同样，我们用牛顿第二定律列出微分方程：

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b\dot{x} + F_{ext} \cos \omega t$$

解这个微分方程，得到：

$$x = \underbrace{A' e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t + \varphi')}_{\text{transient solution}} + \underbrace{A \cos(\omega t - \varphi)}_{\text{steady solution}} + x_0$$

令 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$，则其中

$$\begin{cases} A = \dfrac{F_{ext}/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}} \\ \tan \varphi = \dfrac{b\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

观察解的表达式可以发现，当 t 很大的时候，解的前半部分因为存在指数衰减因子，几乎对 x 不起作用——于是此时物体便近似在做简谐运动，也即“稳定”了。这就是为什么解的前半部分被称为 *transient solution* (暂态解)，后半部分被称为 *steady solution* (稳态解)。

下面，我们采用比较“物理”的方式来分析稳态解的一些极端表现。

将微分方程改写为

$$\ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\omega^2x+\frac{F_{ext}}{m}\cos\omega t=0$$

同时我们有

$$\begin{cases}x=A\cos(\omega t-\varphi)\\ \dot{x}=\omega A\cos(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2})\\ \ddot{x}=\omega^2A\cos(\omega t-\varphi+\pi)\\ F=F_{ext}\cos(\omega t)\end{cases}$$

我们可以把以上式子中的每一项与一个简谐运动所对应，再将其分别与一个匀速圆周运动所对应。于是我们可以用这样一幅图来表达：

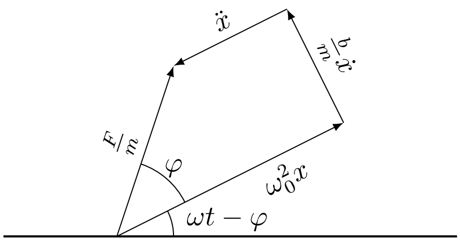


图 4: 用匀速圆周运动表达受迫振动

- Slow drive ($\omega\ll\omega_0$):

  此时 $\dot{x},\ddot{x}$ 很小，于是有

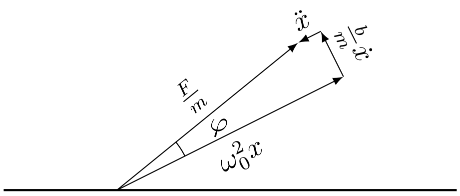


图 5(1)

  可以看出，$\frac{F}{m}\approx\omega_0^2x$，也即 $F_{ext}\cos(\omega t)\approx kA\cos(\omega t-\varphi)$，这说明

$$\begin{cases}A\approx\dfrac{F_{ext}}{k}\\ \varphi\approx 0\end{cases}$$

  即物体运动与驱动力同步。

- Fast drive ($\omega\gg\omega_0$):

  此时 $\ddot{x}\gg\omega_0^2x$，于是有

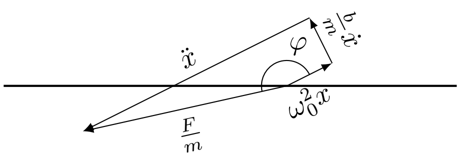


图 5(2)

可以看出，$\frac{F}{m} \approx \ddot{x}$，也即 $F_{ext}\cos(\omega t) \approx mA\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi)$，这说明

$$\begin{cases} A \approx \dfrac{F_{ext}/m}{\omega^2} \approx 0 \\ \varphi \approx \pi \end{cases}$$

即物体运动与驱动力恰好反相。

- *Resonance* (共振) ($\omega = \omega_0$):

  此时 $\omega_0^2 x = \ddot{x}$，于是有

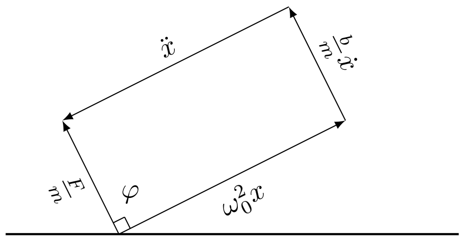


图 5(3)

可以看出，$\frac{F}{m} = \frac{b}{m}\dot{x}$，也即 $F_{ext}\cos(\omega t) = Ab\omega\cos(\omega t - \varphi + \dfrac{\pi}{2})$，这说明

$$\begin{cases} A = \dfrac{F_{ext}}{b\omega_0} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

此时我们便可以收回前文的伏笔：当 $b \to 0$，即忽略阻尼时，与驱动力共振的物体的振幅将会达到无穷大——这显然是不可能的。

下面我们来从数学的角度对稳态解作进一步分析。

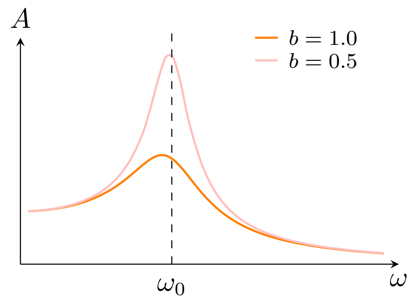


图 6: 不同阻尼系数情况下振幅与驱动力频率的关系

我们很容易求出振幅 A 的极值点：

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{m^2}} \approx \omega_0$$

因此，物体的共振频率实际略小于物体的固有频率，但为了方便起见，我们一般认为它们相等。当物体处于共振状态时，振幅达到最大值；阻尼系数越接近 0，物体的最大振幅越大：

$$A_{max} = \frac{F_{ext}/b}{\sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{b^2}{m^2}}} \approx \frac{F_{ext}}{b\omega_0}$$

3 *Waves* (波)

3.1 Introduction

波随处可见。从物理的角度而言，我们将**某一物理量的扰动或振动在空间逐点传递时形成的运动**称为波。不同形式的波虽然在产生机制、传播方式和与物质的相互作用等方面存在很大差别，但在传播时却表现出多方面的共性，可用相同的数学方法描述和处理。

波可以分为以下三类：

- *Mechanical Waves* (机械波): e.g. Water, Sound, *Seismic Waves* (地震波)...
- *Electromagnetic Waves* (电磁波): e.g. Light, Radio...
- *Matter Waves* (物质波): Quantum mechanical view of fundamental particles.

3.2 *Mechanical Wave* (机械波)

下面我们主要讨论机械波。机械波的正式定义如下：

- A mechanical wave is the large movement of a disturbance in a*medium* (介质), whereas the particles that make up the medium oscillate about a fixed equilibrium position.

机械波的形成需要以下三个条件:

1. *Source of disturbance* (波源)
2. *Medium* (介质)
3. Physical connection between *adjacent* (邻近的)*portions* (部分) of the medium

3.3 *Pulse Wave* (脉冲波)

脉冲波是一个有限长度的波。例如，如果只摇晃绳子的末端一次，则会产生脉冲波。

我们称脉冲通过之前以及之后绳子所在的位置为 *Equilibrium position* (平衡位置)，称绳上质点位移的最大值为 *Amplitude* (振幅)，用 A 表示。波的振幅由波源决定；与振动类似，波的能量与振幅正相关。

脉冲波是一种 *traveling wave* (行波)。我们称 *Displacement* (位移) y 为 *Wave Function* (波函数)：

$$y = f(x,t) = f(x \pm vt)$$

其中，v 是 *wave speed* (波速), $f(x-vt)$ 代表 *right-moving wave* (右行波), $f(x+vt)$ 代表 *left-moving wave* (左行波)。

出于对 *polarization* (偏振) 的研究，按照振动方向与传播方向的不同关系，波又可以分为以下两类

- *Transverse Wave* (横波): A wave is transverse if the displacement from equilibrium is perpendicular to the direction the wave is traveling, or $\Delta\vec{y} \perp \vec{v}$.

  e.g. Light, or the wave along a string...

- *Longitudinal Wave* (纵波): A material wave is longitudinal if the medium displacement from equilibrium is in the same direction that the wave is traveling, or $\Delta\vec{y} \,//\, \vec{v}$.

  e.g. Sound, or the wave along a *spring* (弹簧)...

3.4 *Superposition of Waves* (波的叠加)

在满足线性近似的情况下, 波的叠加是线性的。我们可以用下面的公式表达波的叠加:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

对于满足这一关系的波, 我们称之为 *Linear Waves* (线性波)；否则称之为 *Nonlinear Waves* (非线性波)。

线性波假设下，两束相遇的行波才可以穿过对方而不对其本身产生任何影响。

下面，我们先给出 *interference* (干涉) 的定义:

- The combination of separate waves in the same region of space to produce a *resultant* (合成的) wave is called interference.

根据两束波叠加时的表现，我们将其分为以下两类:

- *Constructive Interference* (相长干涉)：The phenomenon where two or more waves combine to form a wave with greater amplitude.

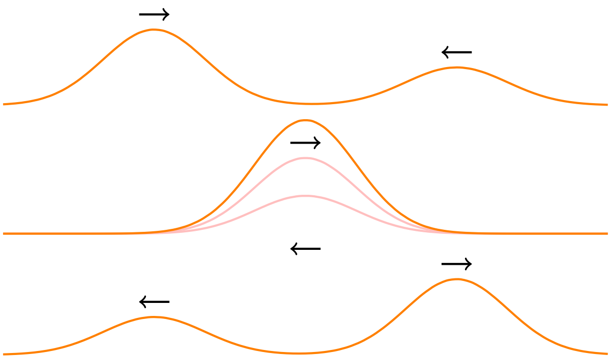


图 7: *Constructive Interference* (相长干涉)

- *Destructive Interference* (相消干涉)：The phenomenon where two or more waves combine to form a wave with reduced or zero amplitude.

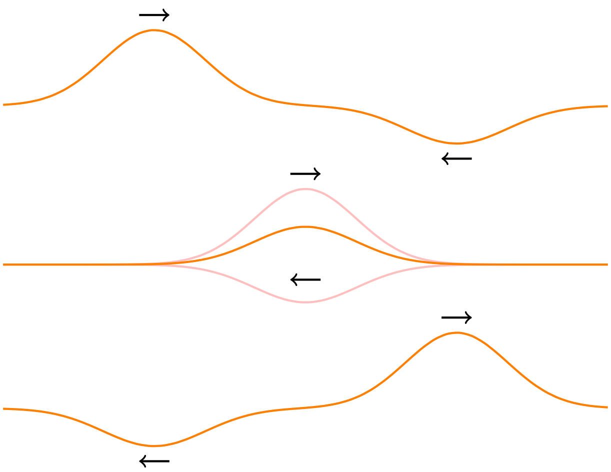


图 8: *Destructive Interference* (相消干涉)

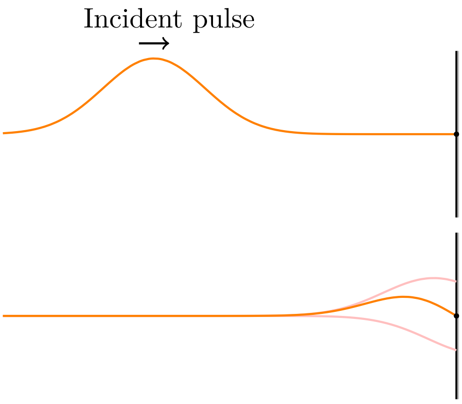
3.4.1 ***Reflection of Waves*** (波的反射)

当绳波遇到绳的端点，会发生反射现象。绳波的反射形式与端点的约束有关。一般地，我们称之为 *Boundary Condition* (边界条件)。

我们先介绍最简单的两种边界条件形式：

- *Fixed Boundary Condition* (固定边界条件)：

  顾名思义，该情况对应的是绳波一个端点固定的情况。根据牛顿第三定律知，反射波将会与入射波相反。



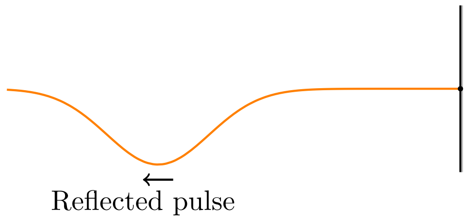


图 9: 固定边界条件下波的反射

- *Free Boundary Condition* (自由边界条件)：

  该情况对应的是绳波一个端点可以上下自由移动的情况（例如用一个圆环套在杆子上）。对端点进行受力分析可知，反射波将会与入射波相同。

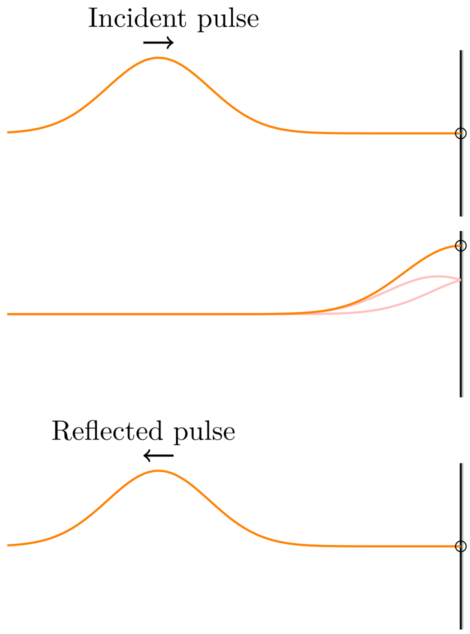


图 10: 自由边界条件下波的反射

3.4.2 ***Transmission of Waves*** **(波的透射)**

我们可以将波的反射看作是极端情况下的透射（没有波成功透射）。若边界的状态介于这两种极端之间，则部分入射波会被反射，另一部分则透过边界传播。不妨记介质一中波速为 v_1，介质二中波速为 v_2，根据不同介质中波速的相对大小关系，我们将其分为以下两类：

- $v_1 > v_2$：此时波的传播接近于 *Fixed Boundary Condition* (固定边界条件)，发生 *Half-Wave Losses* (半波损失)（即反射波反相）。

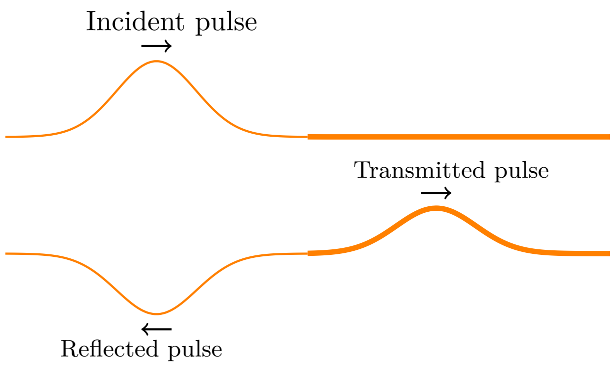


图 11

- $v_1 < v_2$：此时波的传播接近于 *Free Boundary Condition* (自由边界条件)，反射波不反相。

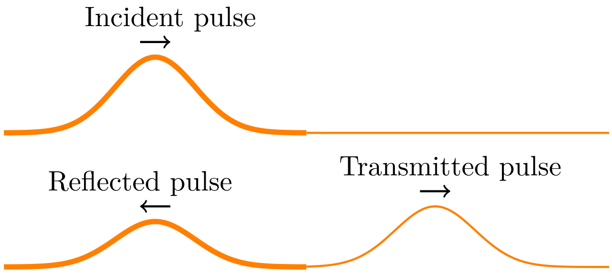


图 12

3.5 *Linear Wave Equation* (线性波动方程)

在前面对脉冲波的讨论中，我们主要是从相对物理的角度来观察波传播中的现象。下面，我们通过数学的角度来严格刻画波的传播过程。

我们先介绍 *phonon* (声子) 模型，描述固体材料中机械波的传播。

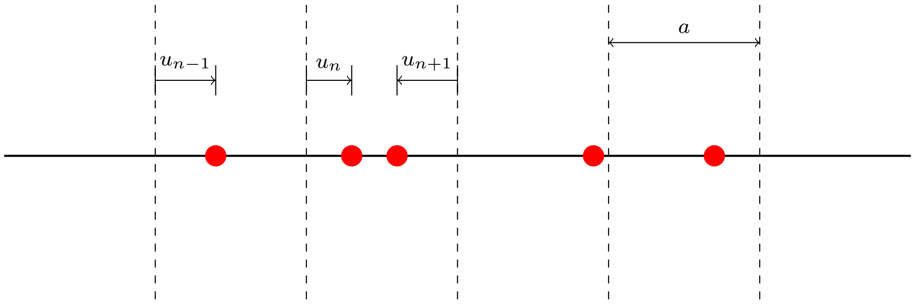


图 13：Mechanical waves in *monoatomic crystal* (单原子晶体)

记晶格常数为 a，则第 n 个声子的平衡位置 $X_n = na$。再记第 n 个声子的实际位置为 x_n，则它偏离平衡位置的位移为 $u_n = X_n - x_n$。

为简单起见，我们只考虑相邻声子间的相互作用。记势能函数为 $\psi(\Delta x)$，在 $\Delta x = a$ 点展开，我们有

$$\begin{aligned}\psi(\Delta x) &= \psi_0 + \frac{1}{2}k(\Delta x - a)^2 + \cdots \\ &= \psi_0 + \frac{1}{2}k(x_n - x_{n-1} - a)^2 + \cdots \\ &\approx \psi_0 + \frac{1}{2}k(u_n - u_{n-1})^2\end{aligned}$$

于是

$$U^{total} \approx U_0^{total} + \frac{k}{2}\sum_n (u_n - u_{n-1})^2$$

对于第 n 个声子，我们有

$$F_n = -\frac{\mathrm{d}U^{total}}{\mathrm{d}u_n} = k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1})$$

再由牛顿第二定律

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1})$$

在 $\lambda \gg a$ 的条件下，作如下变形

$$\begin{aligned}m\ddot{u}_n &= ka\frac{u_{n+1} - u_n}{a} - ka\frac{u_n - u_{n-1}}{a} \\ &= ka\frac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n} - ka\frac{u_n - u_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \\ &= ka\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_n + \frac{a}{2}} - ka\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_n - \frac{a}{2}} \\ &= ka^2\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_n + \frac{a}{2}} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_n - \frac{a}{2}}}{(x_n + \frac{a}{2}) - (x_n - \frac{a}{2})} \\ &= ka^2\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_n}\end{aligned}$$

最后，令 $v \equiv a\sqrt{\frac{k}{m}}$，我们得到了波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

上面的推导过程是基于纵波的，下面我们基于绳波，对横波进行推导。

假设绳子的振幅很小，我们对一小段绳子进行受力分析：

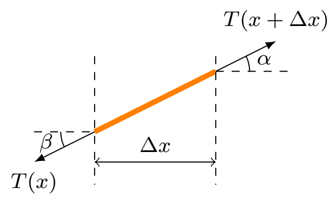


图 14：对绳子的受力分析

α, β 都很小，于是有

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha \approx T(x)\cos\beta \approx T$$

记绳子的线密度为 μ，离开平衡位置的位移为 u，根据牛顿第二定律，有

$$\begin{aligned}
\mu\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T(x+\Delta x)\sin\alpha - T(x)\sin\beta \\
&\approx T\tan\alpha - T\tan\beta \\
&= T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x} \\
&= T\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

约去 Δx，令 $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

显然，方程的形式是完全一致的。

经过简单的验证可知，波动方程的解具有以下形式

$$u = F(x+vt) + G(x-vt)$$

其中，$F(x+vt)$ 代表左行波，$G(x-vt)$ 代表右行波。

3.6 *Periodic Wave* (周期波)

物理世界中的波千千万，本着从简单到复杂的理念，我们先讨论一种特殊的波——周期波。而周期波中最简单的莫过于正弦波了。仿照简谐振动，我们定义以下几个物理量来描述一个正弦波。

- *Amplitude* (振幅) A: The maximum displacement of the particle from the equilibrium position.
- *Period* (周期) T: The time taken for one complete cycle of motion.
- *Frequency* (频率) f: The number of cycles per unit time.
- *Wavelength* (波长) λ: Distance of points whose oscillations differby 2π.
- *Angular frequency* (角频率) ω: Which indentically equals to $\dfrac{2\pi}{T}$.
- *Angular wave numbers* (角波数) k: Which indentically equals to $\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

根据波在一个周期内的平移，我们有关系式

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

考虑如下正弦波：

$$\begin{aligned} y &= A\sin(kx - \omega t + \varphi) \\ &= A\sin\left[k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) + \varphi\right] \\ &= A\sin\left[k\left(x - vt\right) + \varphi\right] \\ &= F(x - vt) \end{aligned}$$

因此，$y = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$ 是波动方程 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 的解。

容易求得，对于该波上的一个质点，其速度 v 与加速度 a 分别为：

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t + \varphi) \\ a &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t + \varphi) \end{aligned}$$

3.6.1 *Rate of Energy Transfer* (能量传递速率)

在波动过程中，介质中的每个质点都在做简谐振动，因此波的能量包括动能和势能两部分。

设线密度为 μ，我们有 $\mathrm{d}m = \mu\mathrm{d}x$，故质点的动能为

$$\mathrm{d}K = \frac{1}{2}(\mu\mathrm{d}x)v^2$$

其中，$\mu\mathrm{d}x$ 是质点的质量，v 是质点的振动速度。

对于正弦波 $y = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$，质点的振动速度为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

因此，动能为

$$\mathrm{d}K = \frac{1}{2}(\mu\mathrm{d}x)A^2\omega^2\cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

动能传输速率为

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2\cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

从而得到动能传输速率平均值为

$$\left(\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\right)_{avg} = \frac{1}{4}\mu v\omega^2 A^2$$

对于同一正弦波，势能为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U = T\cdot(\mathrm{d}l - \mathrm{d}x) &= T\cdot\left(\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} - \mathrm{d}x\right) \\ &= T\mathrm{d}x\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} - 1\right] \\ &= \frac{1}{2}T\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}v^2\mu\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\omega^2\mu\cos^2(kx - \omega t + \varphi)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

势能传输速率为

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2\cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

从而得到势能传输速率平均值为

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right)_{avg} = \frac{1}{4}\mu v\omega^2 A^2$$

可以发现，在波动过程中，任一质元的动能和势能相等，且同相位变化。于是质点的总能量，即其动能和势能之和，为

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}K + \mathrm{d}U = \mu v A^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

总能量的传输速率平均值为

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)_{avg} = \frac{1}{2}\mu v A^2 \omega^2$$

3.6.2 *Interference of Waves* (波的干涉)

当两列或多列周期波在同一介质中传播时，它们会在相遇的区域产生干涉现象。此处“干涉”的要求强于我们在 *Superposition of Waves* (波的叠加) 一节中讨论的。

两列周期波产生稳定干涉图样的条件是：

- 频率相同
- 相位差恒定
- 振动方向相同

考虑两列正弦波

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A\sin(kx - \omega t + \varphi_2)$$

它们的合成波为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

其中，$2A\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)$ 是合成波的振幅，取决于相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$。

干涉可分为以下两类：

- *Constructive interference (in phase)* (相长干涉)：当两列波的相位差为 π 的偶数倍时，振幅相加，形成加强的波。
- *Destructive interference (out of phase)* (相消干涉)：当两列波的相位差为 π 的奇数倍时，振幅相减，形成减弱的波。

3.6.3 *Temporal Interference* (时域相干)

下面，我们讨论更一般的情况。考虑两列正弦波：

$$y_1 = A\sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A\sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)$$

先假设 $v_1 = v_2 = v$，i.e. $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = v$，有：

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= A\sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + A\sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2) \\ &= 2A\sin\left(\frac{(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + (k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)}{2}\right) \\ &\quad \cdot\cos\left(\frac{(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) - (k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)}{2}\right) \end{aligned}$$

令

$$\omega_{avg} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

则合成波可以表示为

$$y = 2A\cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(\frac{x}{v} - t\right) + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right]\sin\left[\omega_{avg}\left(\frac{x}{v} - t\right) + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]$$

进一步地，我们可以这样看：

- $\sin\left[\omega_{avg}\left(\frac{x}{v}-t\right)+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right]$ 表示一个高频载波。
- $2A\cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(\frac{x}{v}-t\right)+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right]$ 表示一个低频调制波。

如果两列波的频率接近（$\omega_1 \approx \omega_2$），则 $\Delta\omega$ 很小，调制波的频率 $\frac{\Delta\omega}{2}$ 也很小。此时，合成波会表现出明显的 *beat* (拍) 现象，即振幅随时间缓慢变化，变化频率为 $\Delta\omega$。

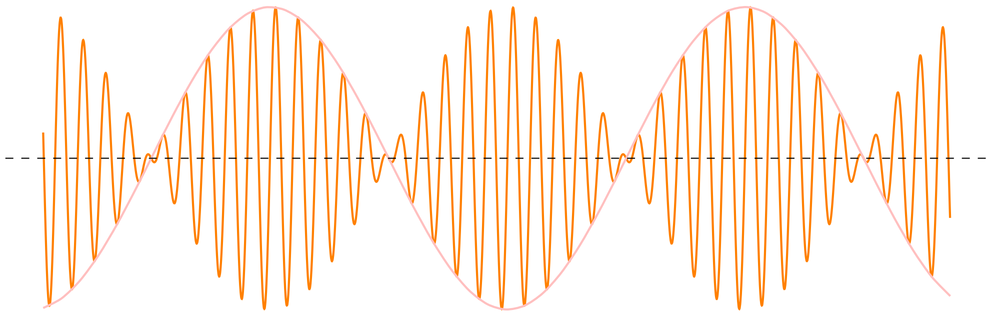


图 14：合成波示意图

- 在小尺度上，我们有
$$\lambda \sim \frac{2\pi}{k} \sim \frac{2\pi v}{\omega_{avg}}$$
- 在大尺度上，我们有
$$\lambda' \sim \frac{2\pi v}{\Delta\omega/2}$$

我们称
$$f_{beat} = \frac{1}{2\pi}\mid \omega_1 - \omega_2 \mid$$
为 *beat frequency* (拍频)。它可以应用于乐器调音。

3.7 *Standing Wave* (驻波)

Standing Wave (驻波) 是两列振幅相同、频率相同、传播方向相反的波叠加形成的特殊干涉现象。

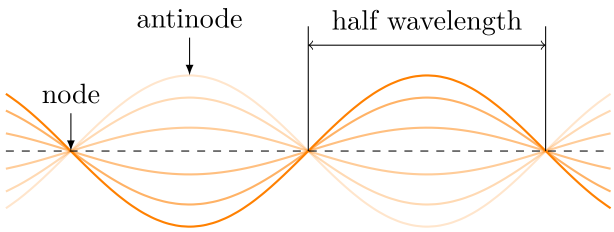


图 14：*Standing Wave* (驻波)

驻波的方程为：
$$y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$
驻波中，始终静止不动的点称为 *Node* (波节)；振幅最大的点称为 *Antinode* (波腹)；相邻的节点或相邻的波腹之间的距离均为 *Half Wavelength* (半波长)。

驻波上每一点都在做简谐运动，没有能量传输。

驻波发生在拨动一条两端固定的弦时。

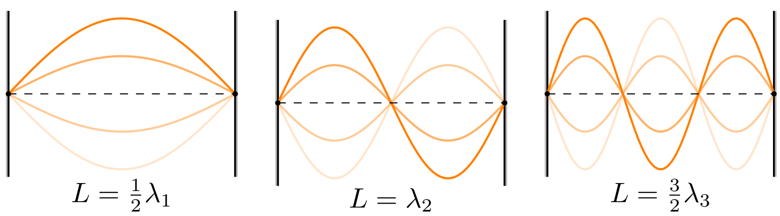


图 15：两端固定情况下弦的振动

更一般的，我们有

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$f_n = n \cdot \frac{v}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

下面，我们考虑一个实际的场景：吉他的发声原理。

我们可以把吉他弦简单抽象为一根两个端点固定的弦

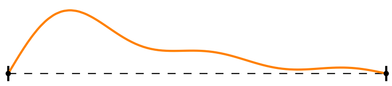


图 16: 吉他弦的振动

吉他弦的振动产生了声音。声音的三个基本要素是 *Pitch* (音高)、*Loudness* (响度) 和 *Timbre* (音色)。音高由频率决定，频率越高，音高越高；响度由振幅决定，振幅越大，声音越响；音色则由波形决定，不同的波形会产生不同的音色。

吉他弦的振动不仅包含基频 f_1，还包含一系列整数倍[3]于基频的 *Harmonics* (泛音)。这些泛音构成了 *Harmonic Series* (泛音列)，其频率为：

$$f_n = n \cdot f_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

其中，f_1 是基频，$f_2, f_3, \dots$ 分别是第二、第三泛音，依此类推。

为了更直观地理解泛音列，我们可以将声音的频域表示画出来。下图展示了图 16 所示吉他弦的频域分布：

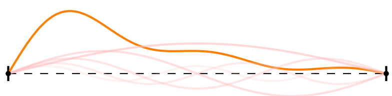


图 17: 吉他弦的振动

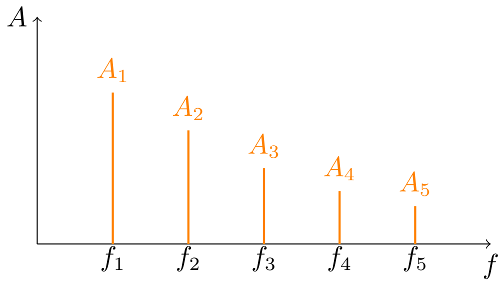


图 18: 吉他弦振动的频域表示

从图中可以看出，泛音的振幅随着频率的增加逐渐减小。通过调整弦的材料、张力以及演奏方式，可以改变泛音的分布，从而产生不同的音色效果——这也就是不同乐器音色不同的真正原因。如何求得频域表示？我们通过傅里叶变换来实现。

3.7.1 *Fourier Analysis* (傅里叶分析)*

任何周期性振动都可以通过 *Fourier Series* (傅里叶级数) 展开为一系列正弦波的叠加：

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right] \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \right] \end{aligned}$$

[3]这是因为两端点固定情况下只允许驻波解。下学期的量子力学将会从这个角度得到量子化。

其中

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$
$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

根据欧拉公式，我们也可以把傅里叶级数写成如下形式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n e^{in\omega t}, \quad Z_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t$$

对于非周期函数（如脉冲波），我们可以把它看做是周期为无穷大的函数。通常意义下的傅里叶级数没有意义，但是经过一些推导，我们可以得到称为 *Fourier transform* (傅里叶变换) 的结果

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

它们也被记作

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \qquad \text{傅里叶变换}$$
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \quad \text{傅里叶逆变换}$$

傅里叶变换实际沟通了时域与频域，具有十分重要的意义。限于篇幅，仅做简介。

3.8 *Elasticity* (弹性)

弹性是介质在外力作用下发生形变，并在外力撤去后恢复原状的性质。了解介质的弹性性质，有利于我们之后理解声波。

我们先介绍两个概念：

- *Stress* (应力)：Deferming force per area.
- *Strain* (应变)：Unit *deformation* (形变).

对于小应力，我们有：

$$\text{Stress} = \text{Modulus(模量)} \times \text{Strain}$$

根据外力作用方式的不同，弹性可以分为以下几类：

- *Tension* (拉伸) & *Compression* (压缩)：当介质受到拉伸或压缩时，其长度发生变化。
  - *Stress* (应力)：F/A
  - *Strain* (应变)：$\Delta L/L$

  其中，F 是作用力，A 是横截面积，ΔL 是长度变化，L 是原长。对应的模量为 *Young's Modulus* (杨氏模量) E：

  $$E = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

- *Shearing* (剪切)：当介质受到切向力作用时，其形状发生变化。
  - *Stress* (应力)：F/A
  - *Strain* (应变)：$\Delta x/L$.

对应的模量为 *Shear Modulus* (剪切模量) G，定义为：

$$G = \frac{F/A}{\Delta x/L}$$

其中，Δx 是切向位移，L 是介质高度。

- *Hydraulic Stress* (液压应力)：当介质受到均匀压力时，其体积发生变化。
  - *Hydraulic Stress* (应力)：ΔP
  - *Strain* (应变)：$\Delta V/V$.

  对应的模量为 *Bulk Modulus* (体积模量) B，定义为：

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

其中，ΔP 是压力变化，ΔV 是体积变化，V 是原体积。

3.8.1 *Stress-Strain Curve* (应力-应变曲线)

应力-应变曲线描述了介质在外力作用下的形变行为。典型曲线包括弹性区域、屈服点、塑性区域和断裂点。

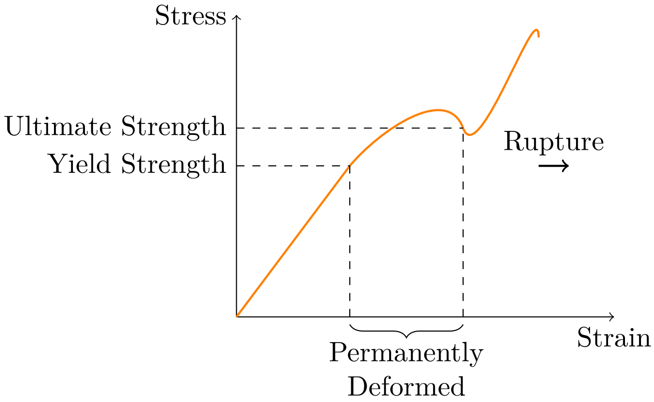


图 19: 应力-应变曲线

3.9 *Sound Wave* (声波)

声波是一种机械波，通过介质中的弹性振动传播。

3.9.1 *The Definition of Sound Wave* (声波的定义)

一切（机械）纵波都可以称为声波。声波的传播需要介质，不能在真空中传播。描述声波，我们可以使用 *Wavefront* (波前) 这一概念。

Wavefront (波前) 是声波传播过程中**相位相同**的点构成的曲面。波前的形状取决于声源的几何形状和传播介质的性质。

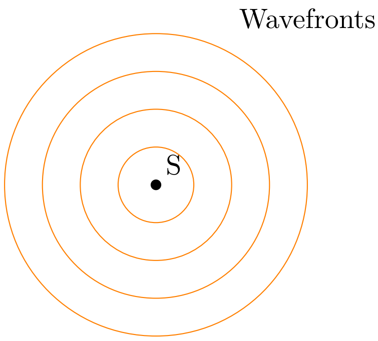


图 20: 波前示意图

3.9.2 *Speed of Sound* (声速)

空气中的声速 v 可以通过介质的弹性性质和密度推导得出。

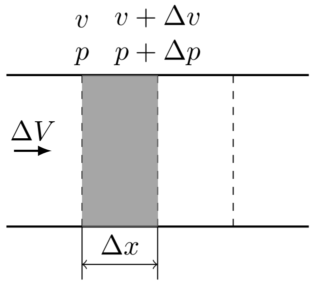


图 21: 空气压缩示意图

设空气从左往右运动，截面积为 A，密度为 ρ，体积模量为 B。

左侧空气压缩右侧空气，使得接触面速度减小（$\Delta v < 0$），压强增大（$\Delta p > 0$）。根据牛顿第二定律，我们有：

$$
\begin{aligned}
F &= ma \\
\Rightarrow [p-(p+\Delta p)]A &= (\rho \Delta x A)\frac{\Delta v}{\Delta t} \\
\Rightarrow -\Delta p A &= \rho A v \Delta v
\end{aligned}
$$

易知空气体积为 $V = A\Delta x = Av\Delta t$，体积变化量为 $V = A\Delta v\Delta t$，于是有

$$
\frac{\Delta V}{V} = \frac{Av\Delta t}{A\Delta v\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}
$$

进一步，我们有

$$
\begin{aligned}
\Delta p &= \rho v \Delta v \\
\Rightarrow \Delta p &= \rho v^2 \frac{\Delta V}{V} \\
\Rightarrow \rho v^2 &= -\frac{\Delta p}{\Delta V / V} = B
\end{aligned}
$$

最终得到

$$
v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}
$$

3.9.3 *Intensity* (声强)

声强 I 是单位时间内通过单位面积的声能，定义为：

$$
I = \frac{P}{A}
$$

其中，P 是声功率，A 是面积。

对于正弦波，我们有

$$
S = A\sin(kx - \omega t + \varphi)
$$

$$
I = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 A^2
$$

根据能量守恒，对于点声源，我们有

$$
I = \frac{P_s}{4\pi r^2}
$$

其中，P_s 是声源功率，r 是到声源的距离。

声强与声压的关系为：

$$
I = \frac{p^2}{2\rho v}
$$

3.9.4 *Sound Level* (声级)

声级 L 是声强的对数尺度表示，单位为分贝（dB），定义为：

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

其中，$I_0 = 10^{-12}\mathrm{W/m^2}$ 是参考声强。

3.10 *Doppler Effect* (多普勒效应)

多普勒效应描述了声源和观察者相对运动时频率的变化。设观察者速度为 v_D，声源速度为 v_S，声速为 v，分以下情况讨论：

- Both Stationary:

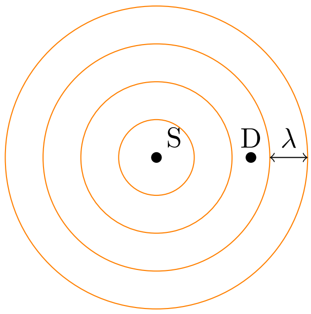


图 22: （1）

频率 f 是单位时间通过观察者的波前数量。显然，此时我们有

$$f = \frac{vt/\lambda}{t} = \frac{v}{\lambda}$$

- Source stationary, Detector moving:

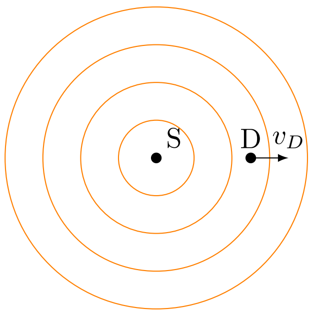


图 22: （2）

此时我们有

$$f' = \frac{(v \pm v_D)t/\lambda}{t} = \frac{v \pm v_D}{\lambda} = \frac{v \pm v_D}{v} f$$

- Detector stationary, Source moving:

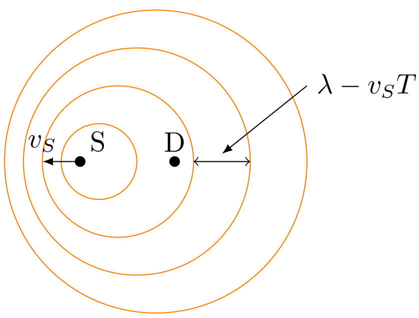


图 22: （2）

此时我们有

$$f' = \frac{vt/(\lambda \pm v_S T)}{t} = \frac{v}{vT \pm v_S T} = \frac{v}{v \pm v_S} f$$

- Both moving:

  综合以上情况，得

$$f' = \frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} f$$

在 *supersonic speeds* (超音速) 的情况下，波前会出现一些有趣的现象：

- $v_S = v$：

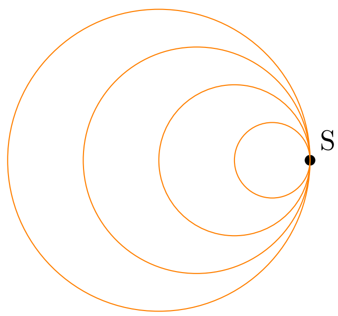


图 23: （1）

  可见，波前都在声源处堆积，出现 *sound barrier* (音障现象)。

- $v_S > v$ (*Shock Wave* (激波))：

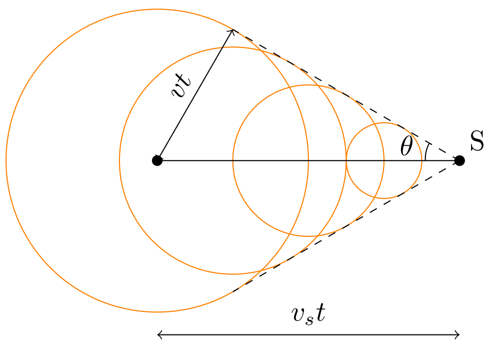


图 24: （2）

  我们称波前的包络面为 *Mach Cone* (马赫锥)，并且有

  – *Mach Cone Angle* (马赫锥角)：$\theta = \arcsin \frac{vt}{v_S t} = \arcsin \frac{v}{v_S}$

  – *Mach Number* (马赫数)：$\frac{v_S}{v}$

2. **An Angled Rail (20 points)**
Say we have a particle m constrained to move along a rail that makes a fixed angle θ with the vertical. The particle is attached to a spring of spring constant k which is itself attached to a wall by a sliding attachment such that the attachment is always at the same height as the mass and the spring is always horizontal. Say the particle is at a stable equilibrium when it is at the position shown in Fig. 1.

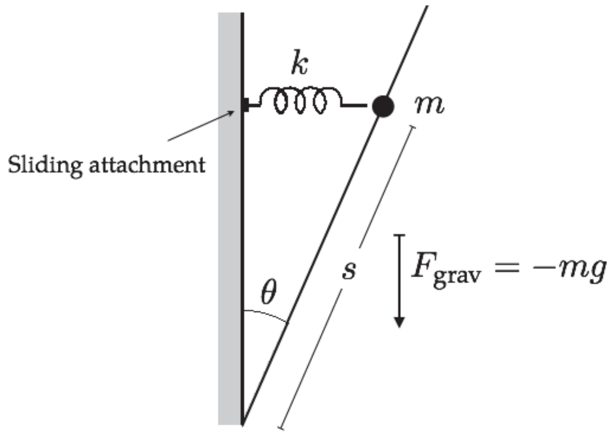


Figure 1: Angled Rails

We track the position of the particle with $s(t)$, the distance between the particle and the wall-rail attachment point.

(a) (5 points) If we set $\theta = \pi/2$, the mass only moves horizontally. In such a scenario, the mass has an equilibrium position $s = X_{\text{eq}}$. What is the equilibrium position for the general θ shown in the figure?

(b) (5 points) What is the equation of motion of the system in terms of s? What should the equation of motion be if we take $\theta \to 0$? Check that your two answers are consistent.

(c) (10 points) Say the particle is displaced from the equilibrium shown in Fig. 1 such that its total energy is E_0 and it first reaches the amplitude of its motion at time $t = 3/4\omega_0$ (where ω_0 is the angular frequency of oscillation). Find $s(t)$ as a function of time in terms of these initial conditions and the prior defined parameters.

4. Transverse Wave On A String

如图 4 (a) 所示, 一根线密度为 μ 的匀质绳的一端固定在 $x = x_0$ 处. 假设绳上拉力的大小为恒定值 T, 横波的振幅较小.

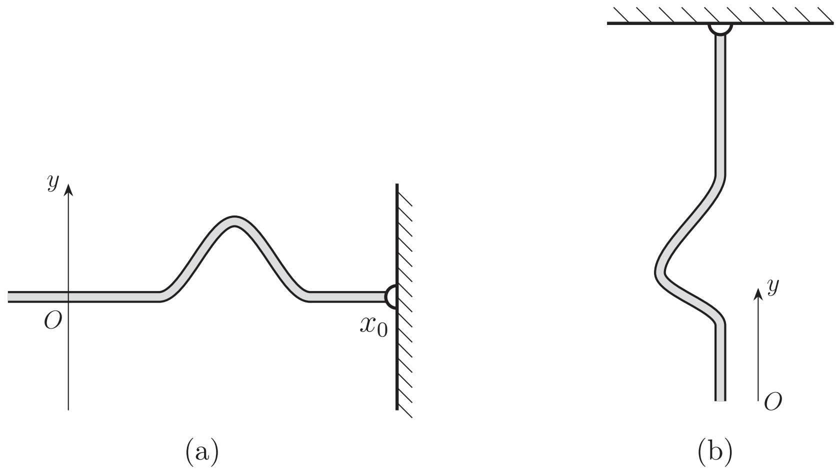


Figure 4: Transverse Wave On A String

(a) 推导绳上横波的波动方程.

(b) 考虑波动方程的正弦解 $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$, 波传到固定端时会产生反射波 $y = A\sin(kx - \omega t + \phi)$. 试求出反射波的相位差 ϕ.

提示: 固定端位移始终为零.

$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

(c) 如图 4 (b) 所示, 若把绳的一端固定在天花板上, 绳子仅受重力作用, 试推导绳上横波的波动方程. 正弦波还是满足该波动方程的解吗?