狭义相对论

普物辅学第三次

杨宏毅

混合 2305
邮箱：2320527323@qq.com
微信： yhyssgyh123

2025 年 5 月 12 日

OUTLINE

1. **相对论运动学**
   1.1. 基本概念
   1.2. 洛伦兹变换
2. **相对论动力学**
   2.1. 相对论动量
   2.2. 相对论能量
   2.3. 动量与能量的转换
3. **相对论的几何表述**
   3.1. 闵氏时空
   3.2. 时序和因果关系
   3.3. 相对论时空图

相对论运动学
基本概念

- **同一事件**: 在狭义相对论中只有**同时同地**发生的事件才叫做同一事件，同一事件是无论在哪个参考系中都要承认的（比如 S 系中的李同学自己的钟读数为 5：00 时与 S' 中的王同学在同一位置相遇看见王同学的钟读数为 4:00，那么王同学也必须承认当自己的钟读数为 4:00 时与李同学相遇并且看到李同学的钟读数为 5:00）

相对论运动学
基本概念

- **同一事件**: 在狭义相对论中只有**同时同地**发生的事件才叫做同一事件，同一事件是无论在哪个参考系中都要承认的（比如 S 系中的李同学自己的钟读数为 5：00 时与 S' 中的王同学在同一位置相遇看见王同学的钟读数为 4:00，那么王同学也必须承认当自己的钟读数为 4:00 时与李同学相遇并且看到李同学的钟读数为 5:00）
- **观察与"看"**：在狭义相对论中我们在题目中遇到的大部分情形是观察，比如说"在地面系看来火车系上的追击过程花了多久时间"这种"看"应该理解为观察，也就是通过实验、测量等方式以一种上帝视角（可以有无数个在同一个系里的观察者）得出的结果（也就是用洛伦兹变换所得到的结果）；我们也许还会遇到一种"看"，这种看应该理解为一个单独的观察者所观察到的情况，如高速运动的物体的视觉效应，我们之后的练习也会涉及到这一点。

相对论运动学

基本概念

基本假设

- 光速与光源和接收器的运动无关（光速不变原理）
- 对于任何两个匀速运动的观察者来说，基本物理定律完全相同（相对性假设）

相对论运动学
洛伦兹变换

洛伦兹变换是狭义相对论的核心，在理解种种狭义相对论现象之前，我们不妨先引入洛伦兹变换。

洛伦兹变换（前一列为正变换，后一列为逆变换）

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y, y = y'$$

$$z' = z, z = z'$$

洛伦兹速度变换（前一列为正变换，后一列为逆变换）

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

相对论运动学
洛伦兹变换

在之后的讨论中 v 统一代表两个参考系的相对速度，一些公认的符号定义为

$$\beta = \frac{v}{c}$$

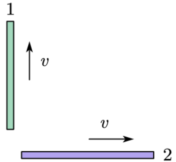
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

实际上由基本假设 2（相对性假设）我们知道无论在哪个参考系下洛伦兹变换都应该具有相同的形式。所以我们自然而然的引入一种符号法则，即给 v 带上正负号，并约定在等号左边的系看来等号右边的系沿着等号左边系的正方向运动时取正号，沿着负方向运动时取负号。这样正变换和逆变换就可以等效为一个变换了。

相对论运动学
洛伦兹变换

例 1(垂直运动的尺子)

如下图所示，两把尺子静止长度都为 L_0，朝着垂直的方向以速度 v 运动，问在一把尺子上看另一把尺子的长度是多少？



answer

首先我们利用速度变换求出尺子 1 相对尺子 2 的速度，有

$$u'_x = \frac{u_x + V}{1 + \frac{u_x V}{c^2}} = \frac{0 + (-v)}{1 + \frac{0(-v)}{c^2}} = -v$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u_x V}{c^2}} = \frac{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{0(-v)}{c^2}} = v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

由于尺子 1 相对于尺子 2 是朝着 y 方向摆着的，故仅有 y 方向的速度会造成长度缩短，即

$$\beta' = \frac{u'_y}{c} = \beta\sqrt{1-\beta^2}$$

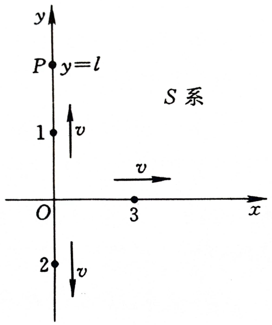
所以就得到长度 L'

$$L' = L_0\sqrt{1-\beta'^2} = L_0\sqrt{1-\beta^2(1-\beta^2)}$$

例 2

惯性系 S 中三艘已经处于匀速直线运动的飞船 1、2、3，各自的速度大小相同为 v，航向如图所示。某时刻三船相聚于 O 点，并且将各自的时钟都校准在零点。飞船 1 到达图中与 O 点相距 l 的 P 处时，发出两束无线电信号，而后分别被飞船 2 和飞船 3 接收到。求：

1. 飞船 1 确定发射信号的时刻 t_1；
2. 飞船 3 看来飞船 1 的速度；
3. 飞船 2 看来接收到信号的时间 t_2；
4. 飞船 3 看来接收到信号的时间 t_3（附加）；



answer

(i) 列出时空坐标

- 飞船 1 出发：$(y_{11}, t_{11}) = (0, 0)$
- 飞船 1 发射信号：$(y_{12}, t_{12}) = \left(L, \frac{L}{v}\right)$

则运用洛伦兹变换

$$t_1 = t'_{12} - t'_{11} = \gamma\left(t_{12} - t_{11} - \frac{v(y_{12} - y_{11})}{c^2}\right) = \frac{L}{\gamma v}$$

或者，我们直接在飞船系下看，由于尺缩 $L' = \gamma L$，所以直接就有

$$t_1 = \frac{L}{\gamma} \cdot \frac{1}{v} = \frac{L}{\gamma v}$$

answer

(ii) 由速度变换公式：

$$u_y = \frac{1}{\gamma}\frac{v}{1-\frac{-v\cdot 0}{c^2}} = \frac{v}{\gamma}$$

$$u_x = \frac{0-v}{1-\frac{-v\cdot 0}{c^2}} = -v$$

(iii)

- S 系下飞船 2 出发：$(y_{21}, t_{21}) = (0, 0)$
- S 系下飞船 2 接收到信号：t_{22}, y_{22}?

$$t_{22} = \frac{l}{v} + \frac{2l}{c-v}$$

$$y_{22} = -vt_{22} = -l - \frac{2lv}{c-v}$$

answer

时空坐标：(y_{22}, t_{22})

$$(y_{22}, t_{22}) = \left(-l - \frac{2lv}{c-v}, \frac{l}{v} + \frac{2l}{c-v}\right)$$

由洛伦兹速度变换：

$$t_2 = t'_{22} - t'_{21} = \gamma\left(t_{22} - t_{21} + \frac{v(y_{22} - y_{21})}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{l}{v} + \frac{2l}{c-v}\right)$$

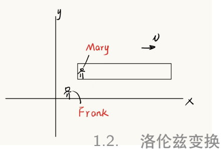
(iv)

$$t = \sqrt{1-\beta^2}(\frac{1}{\beta} + \frac{\sqrt{2-\beta^2}+\beta}{1-\beta^2}\frac{l}{c}$$

例 3(2024 年期末)

如图所示，列车以 v 的速度向右运动，观察者 Mary 在列车上，Frank 列车外的地面参考系中，求：

1. 求在 Mary 系下以 u'_y、u'_x 运动的物体在 Frank 系下速度 u_y、u_x；
2. Mary 在列车中竖直向上投射一束光束，根据（1）中所得，求 u_y、u_x 并验证光速不变；
3. Mary 参考系中有一列波，其中某相邻波前的时空坐标为 $(x', t') = (0, 0)$ (λ, T) 求 Frank 系下这两波前的时空坐标，并根据此求得 Frank 看来该波的频率 (假设在 Mary 系中频率 $f_0 = \frac{1}{T}$)
4. 设列车静止长度为 L，此时 Mary 站在列车尾内向前发射一道光束，求在 Frank 看来光束到达列车前端所花的时间。



answer

1,2 问略

(3) 根据洛伦兹变换有

$$(x,t)=(0,0),\left(\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\left(\frac{\lambda+\beta cT}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{T+\beta\lambda/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

代入得到:

$$f=\frac{1}{T'}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{T+\beta\lambda/c}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\beta_0}$$

式中

$$\beta_0=\frac{v_0}{c}=\frac{f_0\lambda}{c}$$

(4) 由洛伦兹变换

$$\Delta t'=\frac{L/c+vL/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

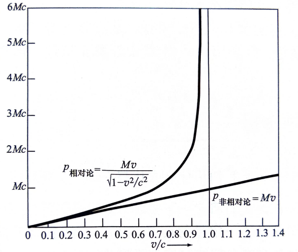
相对论动力学

相对论动量

我们知道在经典力学中动量被定义为物体质量和速度的乘积，在狭义相对论中我们知道光速是物体能达到的最高速度，那么我们自然会要求当一个有质量的物体在趋于光速时应该具有无穷大的动量（否则就可以通过某些手段得到大于光速的物体），故我们自然而然要对动量进行修正，即得到相对论动量

$$p \equiv \frac{M_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

如右图所示我们看到动量在 v 趋于 c 时发散，这与我们之前的讨论相吻合。



相对论动力学

相对论动量

这时我们得引入一些新的概念来解释上述现象，由于我们认为速度总是有限的，所以我们引入动质量

$$M(v) = \frac{M_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

同时定义 M_0 为物体的静质量，这样修正之后，我们就得到了一个逻辑环闭合的理论。（如果你愿意你也可以按照别的方式来进行定义）

相对论动力学

我们知道在经典力学中动能被定义为 $\frac{1}{2}M_0v^2$，那么在相对论中我们又该如何定义动能和能量呢？回想起在经典力学中我们是用做功来定义动能，我们不妨沿用这个思路，并将牛顿定律写成如下形式：

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{M_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

令 F 在 x 方向上，那么功 W 就是

$$W=\int Fdx=\int\frac{d}{dt}\frac{M_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}dx=\int\frac{d}{dt}\left(\frac{M_0v}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\right)\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int\left[\frac{M_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{dv}{dt}+\frac{Mv^3c^{-2}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}}\frac{dv}{dt}\right]dt=\int\frac{M_0vdv/dt}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}}dt=\int\frac{d}{dt}\left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)dt$$

相对论动力学
相对论能量

这里已用到了 $dx/dt = v$
如果假定在积分上限时速度是 v，在积分下限时是 $v = 0$，则得

$$W = M_0 c^2(\gamma - 1)$$

为此我们就得到了动能 K 的定义 $K = M_0 c^2(\gamma - 1)$ 新的表达式在 $v << c$ 时会退化成经典情形，这是因为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots,$$

忽略高阶小量我们就得到了

$$K = \frac{1}{2}Mv^2$$

因此我们说经典力学定律是相对论力学定律在低速下的近似。

相对论动力学
相对论能量

爱因斯坦质能方程告诉我们一个粒子在静止时也具有能量，具体来说是

$$E_0 = M_0 c^2$$

式中 M 是粒子的静质量。我们将这种能量称为静止能量，将其与动能 K 相加我们就得到了总能量 E

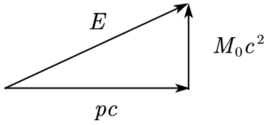
$$E \equiv \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

相对论动力学
动量与能量的转换

利用上文讨论所得，我们发现

$$p^2c^2 + {M_0}^2c^4 = E^2$$

这被称作动量能量三角关系，可用右边的图来辅助记忆 (直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方和)



将上式变形我们就可以得到一个洛伦兹变换不变量 (在洛伦兹变换下不变，即在任何惯性系下值相同)

$$E^2 - p^2c^2 = {M_0}^2c^4 \equiv const$$

相对论动力学
动量与能量的转换

由于动量守恒是空间平移对称性，能量守恒是时间平移对称性结果，我们可以想象动量和能量的变换应该分别和洛伦兹变换中的位置和时间对应，具体而言就是

能量动量变换 (前一列正变换后一列逆变换)

$$p'_x = \gamma\left(p_x - v\frac{E}{c^2}\right), p_x = \gamma\left(p'_x + v\frac{E'}{c^2}\right)$$

$$p'_y = p_y, p_y = p'_y$$

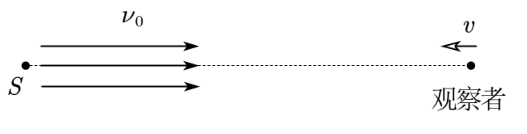
$$p'_z = p_z, p_z = p'_z$$

$$\frac{E'}{c^2} = \gamma\left(\frac{E}{c^2} - \frac{p_x v}{c^2}\right), \frac{E}{c^2} = \gamma\left(\frac{E'}{c^2} + \frac{p'_x v}{c^2}\right)$$

相对论动力学
动量与能量的转换

例 1(光的多普勒效应)

如下图所示，波源 S 发出频率为 ν_0 的光波，一观察者相对波源以速度 v 靠近，问观察者观察到的波源的频率是多少？如果改为观察者静止波源靠近，结果会有变化吗？



answer

利用动量变换有 (注意式中为什么是加号)

$$p'_x = \gamma\left(p_x + v\frac{E}{c^2}\right)$$

并且对于光子有

$$E = h\nu_0, p_x = \frac{h\nu_0}{c}$$

带入后即

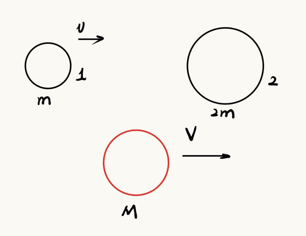
$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu_0}{c}\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}(1+\beta)\ ,\ \nu = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu_0$$

我们知道由基本假设 2 所有惯性系平权，故光源动观察者不动和观察者动光源不动应该得到相同结果。
(注意这和经典力学中的多普勒效应不一样)

例 2(2024 年期末)

如右图所示，粒子 1 静止质量为 m, 动能为 $2mc^2$, 粒子 2 静止质量为 $2m$, 保持静止。粒子 1 向粒子 2 撞去，碰后合并成一个粒子，其静质量为 M, 以速度 V 运动，请求解：

1. 粒子静质量 M 与速度 V
2. 计算碰撞前后动能的变化
3. 结合 $M > 3m$ 阐述系统碰撞前后的能量变化，这个碰撞能量守恒吗？
4. 求在质心系下 (碰后 M 静止的系下) 碰前 m 的速度



answer

(1) 根据能量守恒和动量守恒分别有

$$mc^2 + 2mc^2 + 2mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{2}mc = \frac{MV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

由此可得

$$M = \sqrt{17}mc^2$$

$$V = \frac{2\sqrt{2}}{5}c$$

answer

(2) 碰撞后动能

$$E_{k2}=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-Mc^2=(5-\sqrt{17})mc^2$$

故有

$$\Delta E_k=E_{k2}-E_{k1}=(3-\sqrt{17})mc^2$$

(3) 由于

$$\Delta E_k=(3-\sqrt{17})mc^2<0$$

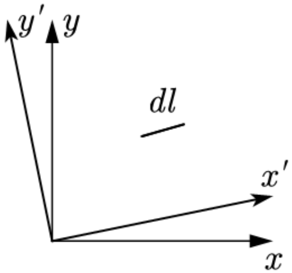
故有部分动能转化为了粒子的静质量，所以 $M>3m$，这对应着经典力学中的非弹性碰撞。

(4) 由洛伦兹速度变换有

$$\gamma_1=3=>v=\frac{2\sqrt{2}}{3}c,\ \ v_{c1}=\frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}}$$

相对论的几何表述
闵氏时空

我们知道对于三维空间而言，欧式几何告诉了我们，一段小线元的长度不会因为坐标轴发生直角坐标变换（坐标轴的转动和原点的平移）发生改变。



同样的在我们的狭义相对论中，在我们的四维空间中，也有一个不变量，它不会因为洛伦兹变换而发生改变，我们将通过洛伦兹变换尝试找出它

相对论的几何表述
闵氏时空

由洛伦兹变换

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

故有

$$dt' = \gamma(dt - vdx), dx' = \gamma(dx - vdt)$$

由此不难得到

$$-dt^2 + dx^2 = -dt'^2 + dx'^2$$

定义闵氏线元 ds^2 为

$$ds^2 \equiv -dt^2 + dx^2$$

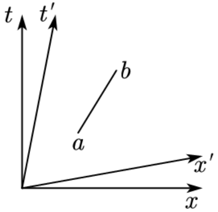
这就是我们要找的四维空间不变量。

相对论的几何表述
闵氏时空

同时我们定义线长为

$$l_{ab} = \int_a^b ds^2$$

由上述定义我们知道在第一象限的角平分线上无论取多长的线段，其长度都是 0，看上去有些奇怪，但是之后我们会揭示他的物理意义。

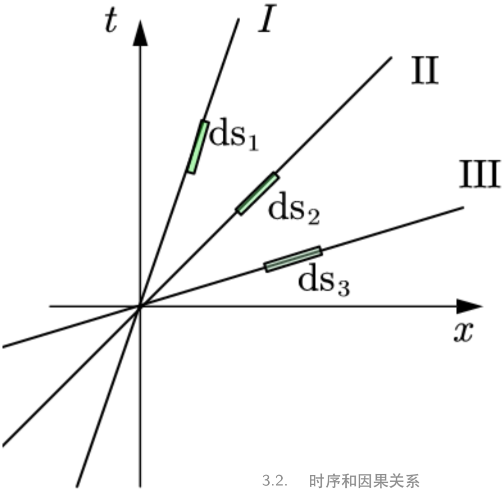


相对论的几何表述
时序和因果关系

根据上述的四维空间不变量我们将时空间隔分为三种类型

- $ds^2 < 0$: 对应图中曲线 I 中的某段间隔，此时称该间隔为类时的。对于类时的间隔，我们总可以通过洛伦兹变换使得两个不同地发生的事件同地发生，即我们总可以找到一个系，使得 $dx = 0$。此时 $ds^2 = -dt^2 < 0$ 保证了这一点。
- $ds^2 = 0$: 对应图中曲线 II 中的某段间隔，此时称该间隔为类光的。对于类光的间隔，其闵氏线长 l 恒等于 0。
- $ds^2 > 0$: 对应图中曲线 III 中的某段间隔，此时称该间隔为类空的。对于类空的间隔，我们总可以通过洛伦兹变换使得两个不同时发生的事件同时发生，即我们总可以找到一个系，使得 $dt = 0$。此时 $ds^2 = dx^2 > 0$ 保证了这一点。

相对论的几何表述
时序和因果关系



相对论的几何表述

时序和因果关系

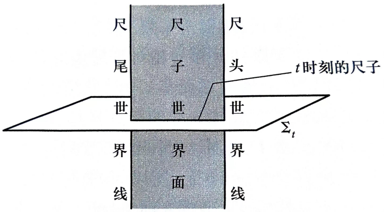
日常生活中我们常常提到因果关系，如手枪的子弹发射了是因，子弹击中 Frank 导致 Frank 领盒饭是果。因果关系是讲求时序的，即手枪的子弹必须先发射，Frank 才能领盒饭，我们不可能说 Frank 先领盒饭子弹再发射。在狭义相对论中究竟什么样的事件间隔是保时序的呢，以下定理给出了答案。

时序定理

- 若两事件的间隔为类时或类光，则任何洛伦兹变换下都保时序；
- 若两事件的间隔为类空的，则存在变时序的洛伦兹变换；

相对论的几何表述
相对论时空图

我们知道对于一个粒子而言，它的每一个事件都是一个时空点，粒子的全部历史就是时空图中的一条曲线（积点成线），称为该粒子的**世界线**（**world line**）。如图我们展示了一个静止的尺子的世界线。



相对论的几何表述

相对论时空图

要利用时空图解决问题我们首先要把两个系的 x 轴和 t 轴画在同一张图中，那么如何画两个系的坐标轴呢，洛伦兹变换给了我们答案。
由洛伦兹变换

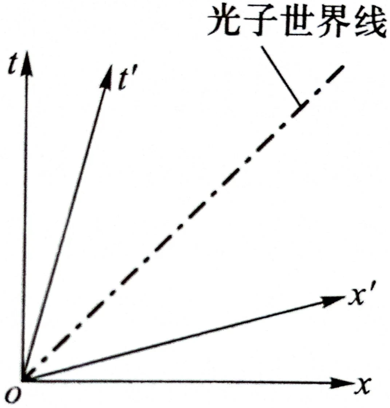
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

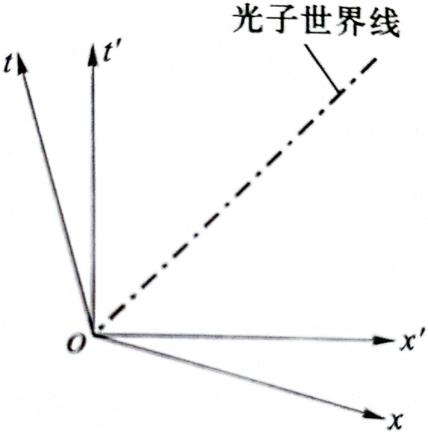
我们如果选取 S 系为基准系，将 x 轴 t 轴画成正交的。那么只需注意到 t' 轴上 $x' = 0$，在 x' 轴上 $t' = 0$，便可分别得到两条直线 $t = \frac{vx}{c^2}, t = \frac{x}{v}$

相对论的几何表述

相对论时空图

同理如果选取 S' 系为基准系，则参考图如下

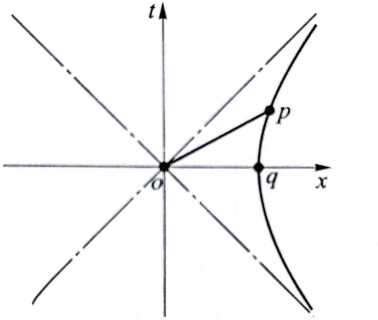




相对论的几何表述

相对论时空图

我们发现时空图具有“欺骗性”，这种“欺骗性”不仅体现在正交性上（明明不垂直的 x' 轴 t' 轴确是正交的），还体现在曲线长度的判断中。下图中 p、q 在同一条双曲线上，按照欧式几何，op 线长大于 oq 的线长，但是实际上按照闵氏几何，二者是等长的。



相对论的几何表述
相对论时空图

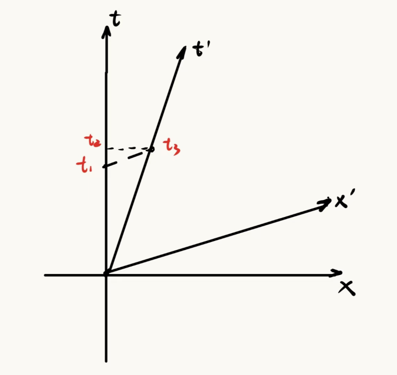
这是因为

$$l_{op} = \sqrt{|-t_p^2 + x_p^2|} = c = l_{oq} = \sqrt{|-t_q^2 + x_q^2|}$$

可见双曲线 $-t^2 + x^2 = \alpha$ 上各点与 o 点所连直线等长。所以我们可以利用双曲线直观的比较闵氏时空图中的线长，所以双曲线也被称为**校准曲线**

例 1

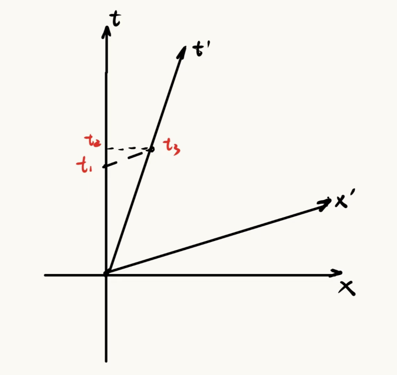
S 与 S' 系在 $x=0$ 处校准时钟 $t=t'$，在闵可夫斯基时空图上由三个时空坐标，试比较



t_1, t_2, T_3 的大小关系。

例 1

S 与 S' 系在 $x = 0$ 处校准时钟 $t = t'$，在闵可夫斯基时空图上由三个时空坐标，试比较 t_1, t_2, T_3 的大小关系。

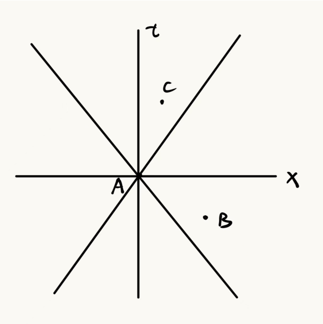


$$t_2 > t_1 = t_3$$

例 2

如图所示有三点 A, B, C, A 位于坐标原点，两根斜线为角平分线将时空图分为了几个区域，以下说法正确的是

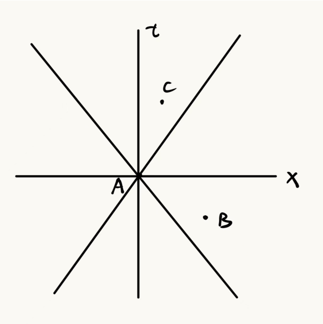
- a) 通过改变参考系可以使得 C 处不同地的事件同时发生
- b) 通过改变参考系可以使得 B 处不同时间发生的事件同时发生
- c)A 中物体可以和 B 中物体接触
- d)B 中事件有因果关系



例 2

如图所示有三点 A, B, C, A 位于坐标原点，两根斜线为角平分线将时空图分为了几个区域，以下说法正确的是

- a) 通过改变参考系可以使得 C 处不同地的事件同时发生
- b) 通过改变参考系可以使得 B 处不同时间发生的事件同时发生
- c)A 中物体可以和 B 中物体接触
- d)B 中事件有因果关系



B