普通物理学讲义：振动与波

目录

第1章：振动

振动是物理学中最普遍的现象之一，从原子内部到天体运行，随处可见。在普通物理学中，我们首先研究最简单也是最基础的振动——简谐运动。

1.1 系统的平衡与稳定性

在探讨复杂的振动之前，我们首先需要理解物体为什么会振动。振动总是发生在一个**平衡位置**附近。对于受保守力作用的系统，我们可以通过**势能函数** $U(x)$ 来深刻理解平衡的本质及其稳定性。

平衡的势能判定

根据功能原理，在一维保守系统中，物体所受的保守力 F 是势能函数 $U(x)$ 对位置的负导数：

$F(x) = -\frac{dU}{dx}$

平衡位置定义为物体所受合外力为零的位置。因此，在平衡点 x_0 处，必然有：

$F(x_0) = -\frac{dU}{dx}\Big|_{x_0} = 0$

物理意义：势能曲线 $U(x)$ 上的**极值点**（切线水平的地方）即为系统的平衡位置。

平衡的稳定性

虽然 $dU/dx = 0$ 确定了平衡位置，但并非所有平衡状态都是相同的。若物体在平衡点受到微小扰动偏离 x_0，根据系统后续的受力反馈，平衡可分为三种类型，可通过势能的二阶导数 d^2U/dx^2 来判定：

类型	条件	物理图像
稳定平衡	$\frac{d^2U}{dx^2}\Big\|_{x_0} > 0$（势能极小）	偏离后受**指向**平衡位置的恢复力
不稳定平衡	$\frac{d^2U}{dx^2}\Big\|_{x_0} < 0$（势能极大）	偏离后受**背离**平衡位置的力
随遇平衡	$U(x) = \text{常数}$（附近区间）	移动后在新位置仍受力为零

稳定平衡与简谐运动的联系

为什么物理学如此重视简谐运动？通过势能函数可以给出最根本的答案。

设系统在稳定平衡点 x_0 附近发生微小位移，对势能函数进行泰勒展开：

$U(x) = U(x_0) + \underbrace{\frac{dU}{dx}\Big|_{x_0}}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x_0}}_{k>0}(x - x_0)^2 + \cdots$

忽略高阶项，令 $k = \frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x_0}$，则：

$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \implies F = -\frac{dU}{dx} \approx -k(x - x_0)$

> **核心结论**：任何保守系统在**稳定平衡点**附近的微小扰动，都受到与位移成正比的反向恢复力，从而**必然产生简谐运动**。此处等效劲度系数 k 即为势能曲线在平衡点处的二阶导数（曲率）。

> ### 📝 例题 1.1（势能与平衡稳定性）
>
> 质量 $m = 0.01\ \text{kg}$ 的质点在一维 x 轴上运动，受保守力作用，势能函数为：
>
> $U(x) = 2x^2 - 0.5x^4 \quad (\text{单位：J，} x \text{ 的单位：m})$
>
> (a) 求所有可能的平衡位置，并判断其稳定性。
>
> (b) 若质点在**稳定**平衡位置附近受微小扰动，求简谐振动的角频率 ω。
>
> **【解】**

> **(a)** 令 $F(x) = -\frac{dU}{dx} = -(4x - 2x^3) = 0$，即 $2x(2 - x^2) = 0$，解得：
>
> $x_1 = 0\ \mathrm{m}, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{2}\ \mathrm{m}$
>
> 计算二阶导数：$\frac{d^2U}{dx^2} = 4 - 6x^2$
>
> - $x_1 = 0$：$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_0 = 4 > 0$，势能极小 → **稳定平衡**
> - $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$：$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{\pm\sqrt{2}} = 4 - 12 = -8 < 0$，势能极大 → **不稳定平衡**
>
> **(b)** 在 $x = 0$ 附近，等效劲度系数 $k_{eq} = 4\ \mathrm{N/m}$，故：
>
> $\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{4}{0.01}} = 20\ \mathrm{rad/s}$

1.2 简谐运动

定义与回复力

物体在**回复力**作用下，在平衡位置附近进行的往复运动称为简谐运动。

- 回复力**方向**总指向平衡位置，**大小**与位移成正比：$F = -kx$
- k 是回复系数（如弹簧的劲度系数），$-$ 号表示方向相反。

基本参数

量	符号	说明
位移	x	相对平衡位置的瞬时位置
振幅	A	最大位移
周期	T	完成一次完整振动的时间
频率	$f = 1/T$	单位时间内的振动次数
角频率	$\omega = 2\pi f$	—

1.3 简谐运动的动力学

运动方程

由牛顿第二定律 $F = ma$ 得：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

运动方程的解

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

其中振幅 A 由初始能量决定，初相位 ϕ 由初始状态（$t = 0$ 时的位移和速度）决定。

对应的速度和加速度：

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi), \qquad a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

相位关系：速度超前位移 $\pi/2$；加速度与位移反相（相位差 π）。

例题 1.2（简谐运动动力学）

质量 $m = 0.5\ \mathrm{kg}$ 的物体悬挂在劲度系数 $k = 50\ \mathrm{N/m}$ 的轻弹簧下端，在平衡位置受到初速度 $v_0 = 10\ \mathrm{m/s}$（向下）的冲击，随后做简谐运动。

(a) 求振幅 A、周期 T 和角频率 ω。
(b) 写出以冲击时刻为 $t = 0$ 的位移方程 $x(t)$（取向下为正）。

【解】

(a)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0.5}} = 10\ \mathrm{rad/s}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0.628\ \mathrm{s}$$

在平衡位置势能为零，由能量守恒：$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$，故

$$A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{10}{10} = 1\ \mathrm{m}$$

(b) 由初始条件 $x(0) = 0$ 得 $\cos\phi = 0$，即 $\phi = \pm\pi/2$；再由 $v(0) = 10 > 0$ 得 $-\omega A\sin\phi > 0$，即 $\sin\phi < 0$，故 $\phi = -\pi/2$。

$$x(t) = \cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(10t) \quad (\mathrm{m})$$

1.4 简谐运动的能量

量	表达式	备注
动能 K	$\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$	在平衡位置最大
势能 U	$\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$	在端点最大
总能量 E	$\frac{1}{2}kA^2 = \text{常数}$	与振幅平方成正比

能量以 $2f$ 的频率在动能和势能间周期性转换，但总量守恒。

例题 1.3（简谐运动能量）

一弹簧振子劲度系数为 k，振幅为 A，总能量为 E_0。

(a) 当位移 $x = A/2$ 时，动能 K 和势能 U 各是多少?
(b) 在何处动能等于势能?

【解】

(a) $U = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E_0$，$K = E_0 - U = \frac{3}{4}E_0$。

（位移为振幅一半时，能量并非平分，动能仍占主导。）

(b) 令 $K = U$，即 $E_0 = 2U = 2 \cdot \frac{1}{2}kx^2$：

$$kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \implies x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.707A$$

1.5 阻尼振动与受迫振动

阻尼振动

现实中摩擦、空气阻力等非保守力将机械能转化为热能，导致振幅衰减。设阻力 $f_d = -bv$，运动方程为：

$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$

三种阻尼情况：

- **欠阻尼**（$b^2 < 4mk$）：振幅指数衰减的振动
- **过阻尼**（$b^2 > 4mk$）：无振动，指数衰减回平衡位置
- **临界阻尼**（$b^2 = 4mk$）：以最快速度回到平衡位置（无振动）

受迫振动与共振

外部驱动力 $F(t) = F_0\cos(\omega_d t)$ 作用下，稳态振幅为：

$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_d^2)^2+(b\omega_d/m)^2}}$

其中 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 为固有角频率。当 $\omega_d \approx \omega_0$ 时，振幅达到最大，即**共振**。

1.6 典型振动系统

弹簧振子与变刚度弹簧

弹簧的刚度系数随长度变化：原长 l_0、刚度 k 的弹簧截至现长 L 后，等效刚度 $k' = (l_0/L)k$。

串并联组合：

- **串联**：$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$（刚度减小）
- **并联**：$k' = k_1 + k_2$（刚度增大）

> ### 📝 例题 1.4（弹簧/弹性绳的振动——2024–25期末简答题2）
>
> 质量 $4m$ 的物体由弹簧（或弹性绳，劲度系数均为 k，自由长度 l_0）竖直悬挂，静止平衡。物体由质量 $3m$ 和 m 两部分粘合而成。$t = 0$ 时 $3m$ 部分突然脱落，留下 m。取悬挂点为 $x = 0$，向下为正。
>
> (a) 求弹簧情况下质量 m 的运动方程（x 关于时间的函数）；
> (b) 求弹性绳情况下的振动周期。
>
> **【解】**
>
> **初始状态：** 弹簧（绳）伸长量 $\delta_0 = 4mg/k$，初始位置 $x_0 = l_0 + 4mg/k$，初速度为零。
>
> **(a) 弹簧情况**
>
> 脱落后，m 的新平衡位置：$x_{eq} = l_0 + mg/k$。
>
> 令 $x' = x - x_{eq}$，则 $\ddot{x}' + (k/m)x' = 0$，初始条件 $x'(0) = 3mg/k$，$\dot{x}'(0) = 0$。解为：

$$\boxed{x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + \frac{3mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

(b) 弹性绳情况

弹性绳不能压缩。脱落后 m 从 $x_0 = l_0 + 4mg/k$ 出发向上运动。

绳有效段（SHM）： 当 $x \geq l_0$ 时弹性绳绷紧，m 做简谐运动，角频率 $\omega = \sqrt{k/m}$。以新平衡位置（弹簧会在 $l_0 + mg/k$ 处）为中心，振幅 $A = 3mg/k$。

绳恢复自然长度（$x = l_0$）时，由能量守恒求得速度：

$\frac{1}{2}k\left(\frac{4mg}{k}\right)^2 = mg \cdot \frac{3mg}{k} + \frac{1}{2}mv^2 \implies v = 2g\sqrt{\frac{2m}{k}}$

自由飞行段： 绳松弛后 m 做竖直抛体，上升后返回，飞行时间 $T' = 2v/g = 4\sqrt{2m/k}$。

绳绷紧段的时间： m 从初位置做 SHM，到达自然长度位置（相对新平衡偏移 $-mg/k$）所对应弧长时间（完整半个周期的一部分）：

$T'' = \left[\pi + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{m}{k}}$

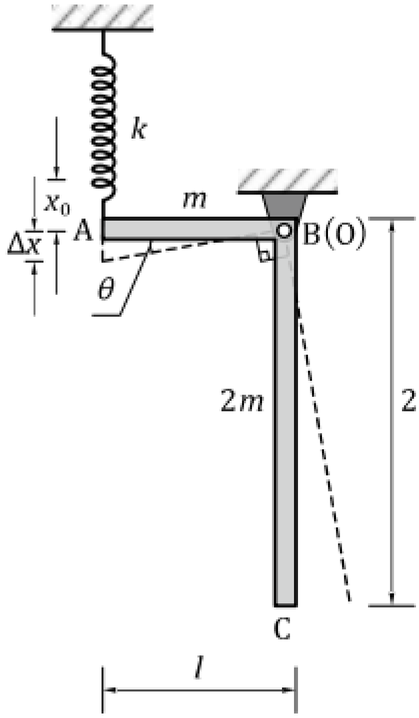
总周期：

$$\boxed{T = 4\sqrt{\frac{2m}{k}} + \left[\pi + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

📝 例题 1.5（物理摆——L形尺的简谐振动，2023–24期末第14题）

均匀 L 形尺：$\overline{AB}$ 段长 l、质量 m；$\overline{BC}$ 段长 $2l$、质量 $2m$，两段垂直。尺在 B 点挂于光滑轴 O，竖直弹簧（劲度系数 k）支撑 A 点。平衡时 $\overline{AB}$ 水平，$\overline{BC}$ 竖直。

(a) 求弹簧平衡伸长量 x_0；
(b) 证明小角度摆动为简谐振动，并求周期 T。



【解】

(a) 对轴 O（即点 B）取力矩平衡：

$kx_0 \cdot l = mg \cdot \frac{l}{2}$

(b) 对 O 点的转动惯量：

$I = \underbrace{\frac{ml^2}{3}}_{AB段} + \underbrace{\frac{2m(2l)^2}{3}}_{BC段} = \frac{ml^2}{3} + \frac{8ml^2}{3} = 3ml^2$

尺转过小角度 θ 时，弹簧额外伸长 $\Delta x \approx l\theta$，恢复力矩（平衡位置处重力矩已抵消）：

$\tau = -kl^2\theta - 2mgl\theta$

转动方程：

$3ml^2\ddot{\theta} = -kl^2\theta - 2mgl\theta \implies \ddot{\theta} + \frac{k}{3m}\theta + 2\frac{g}{l} = 0$

这是简谐振动，角频率 $\omega = \sqrt{k/(3m) + 2\frac{g}{l}}$，周期：

$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$

第2章：波

波是振动在空间中的传播。与振动不同，波不仅随时间变化，还随空间位置变化。波传播的是**能量和动量**，而不是介质本身。

2.1 波的描述和分类

按介质质点振动方向分类

类型	振动方向与传播方向	例子
横波	垂直	绳子上的波、电磁波
纵波	平行	声波、弹簧纵向波

基本参数与关系

- **波长** λ：相邻同相位点的距离
- **波速** v、**频率** f、**周期** T：

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

2.2 波的传播速度与波函数

弦上横波波速

均匀弦（张力 T，线密度 μ）：

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

> ### 例题 2.1（弦上波速）
>
> 均匀绳子长 $L = 10\ \mathrm{m}$，质量 $M = 0.1\ \mathrm{kg}$，一端固定，另一端通过无摩擦滑轮悬挂质量 $m = 5\ \mathrm{kg}$ 的物体。
>
> (a) 求横波波速 v；(b) 若线密度增加一倍，波速如何变化？
>
> **【解】**
>
> **(a)** $\mu = M/L = 0.01\ \mathrm{kg/m}$，$T = mg = 49\ \mathrm{N}$，故
>
> $$v = \sqrt{\frac{49}{0.01}} = 70\ \mathrm{m/s}$$
>
> **(b)** $v \propto 1/\sqrt{\mu}$，线密度加倍后 $v' = v/\sqrt{2} \approx 0.707v$，波速减小为原来的 $1/\sqrt{2}$。

波函数

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波：

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

物理意义：

- 固定 t：给出某时刻波形（空间快照）
- 固定 x：给出某质点的振动方程

📝 例题 2.2（行波相位计算——2024–25期末选择题2）

一列沿 x 正向传播的单色波，在 $x=0$ 处振动方程为

$u=0.1\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$

波速 $v=20\ \mathrm{m/s}$。求 $t=1\ \mathrm{s}$，$x=5\ \mathrm{m}$ 处的相位。

【解】

波数 $k=\omega/v=10\pi/20=\pi/2\ \mathrm{rad/m}$，行波方程：

$u(x,t)=0.1\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)$

代入 $t=1\ \mathrm{s}$，$x=5\ \mathrm{m}$：

$\varphi=10\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{2}=10\pi-2\pi=8\pi\equiv 0$

答：相位为 0（选 D）。

2.3 波的能量和功率

波传播能量，而不是物质。

$\bar{P}=\frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2 \qquad (\text{弦上平均功率})$

$\bar{u}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \qquad (\text{平均能量密度})$

关键点：平均功率和能量密度均正比于 A^2 和 ω^2。

2.4 波的叠加与干涉

叠加原理

$y_{\text{total}}=y_1+y_2+\cdots \qquad (\text{适用于线性小振幅波})$

干涉条件

两列频率相同、相位差恒定的相干波相遇，相位差：

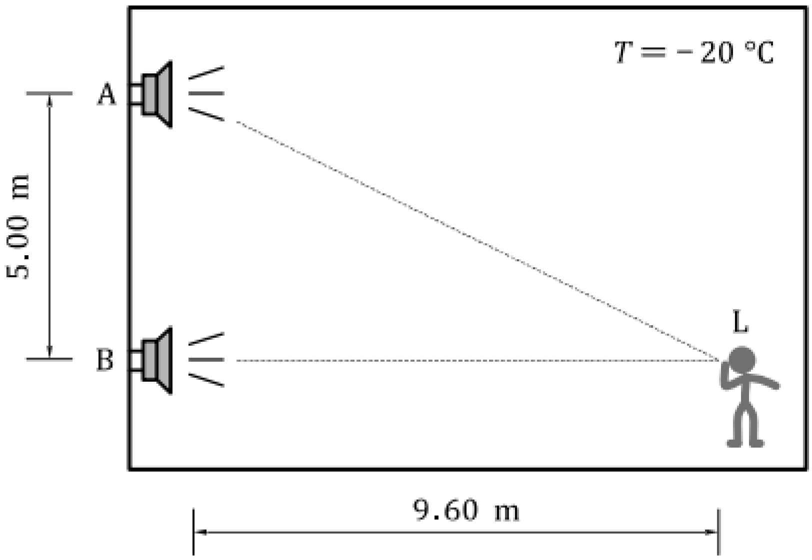
$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}(x_1-x_2)+(\phi_1-\phi_2)$

干涉类型	条件	振幅
相长（加强）	$\Delta\phi=2m\pi$	A_1+A_2
相消（减弱）	$\Delta\phi=(2m+1)\pi$	$\|\|A_1-A_2\|\|$

📝 例题 2.3（双声源干涉——2023–24期末第13题）

室温 $T=-20\ ^\circ\mathrm{C}$，两扬声器 A、B 向听众 L 发出同频率、同强度、同相位的声波（$BL=9.6\ \mathrm{m}$，$AB=5\ \mathrm{m}$，构成直角三角形）。不考虑衰减和反射，听众处于声音最响位置。

(a) 计算该温度下的声速 c_s；(b) 求最低频率 f_1 和次低频率 f_2。



【解】

(a) $T = 253\ \mathrm{K}$，空气平均摩尔质量 $M = 4/5 \times 28 + 1/5 \times 32 = 28.8\ \mathrm{g/mol}$，$\gamma = 1.4$：

$c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1.4 \times 8.31 \times 253}{0.0288}} \approx 319\ \mathrm{m/s}$

(b) 路程差 $\Delta r = AL - BL = 10.82 - 9.6 = 1.22\ \mathrm{m}$，初相同，相长干涉条件 $\Delta r = n\lambda$：

$f_n = \frac{nc_s}{\Delta r} = \frac{319n}{1.22} \approx 261.5n\ \mathrm{Hz}$

最低频率（$n = 1$）：$f_1 \approx 262\ \mathrm{Hz}$；次低频率（$n = 2$）：$f_2 \approx 523\ \mathrm{Hz}$。

📝 例题 2.4（反射面干涉——2024-25期末简答题5）

声波（$f = 400\ \mathrm{Hz}$，$c_s = 343\ \mathrm{m/s}$），波源与接收器相距 $L = 10.0\ \mathrm{m}$，在其连线平行方向距离 d 处有一完美平面反射面（边界振动幅度为零）。直线传播声波与反射声波发生干涉，求：

(a) 干涉相长的最小 $d > 0$；(b) 干涉相消的最小 $d > 0$。

【解】

直接路程 $L = 10.0\ \mathrm{m}$，经反射面的路程 $L_{\mathrm{ref}} = 2\sqrt{(L/2)^2 + d^2}$，路程差：

$\Delta L = L_{\mathrm{ref}} - L = 2\sqrt{25 + d^2} - 10$

波长 $\lambda = 343/400 \approx 0.858\ \mathrm{m}$。完美反射面处振动为零，等效于固定端（硬反射），反射时相位突变 π。总相位差：

$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda} + \pi$

相长干涉（$\Delta\phi = 2n\pi$，$n = 1, 2, \ldots$）：$\Delta L = (n - \frac{1}{2})\lambda$

取 $n = 1$：$2\sqrt{25 + d^2} = 10 + \lambda/2 \approx 10.429\ \mathrm{m}$

$d = \sqrt{5.214^2 - 25} \approx \boxed{1.48\ \mathrm{m}}$

相消干涉（$\Delta\phi = (2n - 1)\pi$，$n = 1, 2, \ldots$）：$\Delta L = (n - 1)\lambda$

$n = 1$ 给出 $d = 0$（不满足）；取 $n = 2$：$2\sqrt{25 + d^2} = 10 + \lambda \approx 10.858\ \mathrm{m}$

> $d = \sqrt{5.429^2 - 25} \approx \boxed{2.11\ \mathrm{m}}$

2.5 驻波

驻波是两列频率、振幅相同，传播方向相反的平面波叠加的结果。

形成方程

$y_1 = A\cos(kx - \omega t), \quad y_2 = A\cos(kx + \omega t)$

$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$

特征

- **波节（Node）**：$\cos(kx) = 0$，即 $x = (n + \frac{1}{2})\lambda/2$，振幅恒为零
- **波腹（Antinode）**：$\cos(kx) = \pm 1$，即 $x = n\lambda/2$，振幅最大为 $2A$
- 相邻波节（或波腹）间距为 $\lambda/2$
- **不传播能量**：能量在节点和波腹之间周期性转换

边界条件与本征频率

边界条件	本征频率
两端固定	$f_n = n\dfrac{v}{2L}$，$n = 1, 2, 3, \dots$
一端固定一端自由	$f_n = (2n-1)\dfrac{v}{4L}$，$n = 1, 2, 3, \dots$

> ### 📝 例题 2.5（驻波节点——习题集第16题）
>
> 位置 A 处的波源发出波：
>
> $y_1 = 0.5\cos 10\pi(t - 0.5x)$
>
> 到达距 A 为 $10\ \mathrm{m}$ 的墙 B 后被**硬**反射。求 A、B 之间保持静止的所有点。
>
> **【解】**
>
> 由波源方程读得：$\omega = 10\pi\ \mathrm{rad/s}$，$k = 5\pi\ \mathrm{rad/m}$，$v = 2\ \mathrm{m/s}$，$\lambda = 0.4\ \mathrm{m}$。
>
> B 处为硬反射（固定端），反射波相位突变 π，反射波为：
>
> $y_2 = -0.5\cos 10\pi(t + 0.5x - 10)$
>
> 叠加整理后得驻波：
>
> $y = \sin(10\pi t)\cdot\sin(5\pi x)$
>
> 波节处 $\sin(5\pi x) = 0$，即 $x = n/5\ \mathrm{m}$（$n = 0, 1, 2, \dots, 50$）。
>
> **答**：$x = 0,\ 0.2,\ 0.4,\ \cdots,\ 10.0\ \mathrm{m}$ **处的点保持静止。**

例题 2.6（驻波的最大速度——2024–25期末填空题2）

弦上驻波方程为

$u = 0.04\cos(60\pi t)\sin(3\pi x)$

求弦上质点的最大速度。

【解】

质点速度 $\partial u/\partial t = -0.04 \times 60\pi \sin(60\pi t)\sin(3\pi x)$，当 $|\sin(60\pi t)| = |\sin(3\pi x)| = 1$ 时取最大值：

$v_{\max} = 0.04 \times 60\pi = 2.4\pi \approx 7.54\ \mathrm{m/s}$

例题 2.7（驻波能量守恒——习题集第17题）

证明：对驻波 $y = y_m \cos kx \sin \omega t$，节点与波腹之间的总能量守恒，且节点和波腹处瞬时功率为零。

【证明】

弦线密度为 μ，张力 $F = \mu v^2 = \mu\omega^2/k^2$。

总能量（以 $[0,\ \lambda/4]$ 为例）：

$\mathrm{d}K = \frac{1}{2}\mu\,\mathrm{d}x\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu y_m^2\omega^2\cos^2 kx\cos^2\omega t\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}U = \frac{F}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2\sin^2 kx\sin^2\omega t\,\mathrm{d}x$

利用 $\int_0^{\lambda/4}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = \int_0^{\lambda/4}\sin^2 kx\,\mathrm{d}x = \lambda/8$：

$E = \frac{1}{2}\mu y_m^2\omega^2 \cdot \frac{\lambda}{8}\underbrace{(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)}_{=1} = \frac{\mu y_m^2\omega^2\lambda}{16} = \text{常数}$

瞬时功率：

$P_i = -F\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = F y_m^2 k\omega\sin kx\cos kx\sin\omega t\cos\omega t = \frac{F y_m^2 k\omega}{4}\sin 2kx\sin 2\omega t$

在**节点**（$\sin 2kx = 0$，如 $x = 0$）和**波腹**（$\sin 2kx = 0$，如 $x = \lambda/4$）处，$P_i \equiv 0$。■

例题 2.8（吉他弦驻波）

两端固定的吉他弦长 $L = 0.8\ \mathrm{m}$，线密度 $\mu = 0.005\ \mathrm{kg/m}$。

(a) 若基频 $f_1 = 440\ \mathrm{Hz}$（A4音），弦的张力 T 应为多少?
(b) 第三谐频（$n = 3$）的频率是多少?

【解】

(a) 基频 $f_1 = v/(2L)$，故 $v = 2Lf_1 = 2 \times 0.8 \times 440 = 704\ \mathrm{m/s}$。

$T = \mu v^2 = 0.005 \times 704^2 \approx 2478\ \mathrm{N}$

(b) $f_3 = 3f_1 = 1320\ \mathrm{Hz}$。

2.6 多普勒效应

当波源或观察者（或两者）相对于介质运动时，观察者接收到的频率与波源发射的频率不同。

$$\boxed{f' = f \cdot \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}}$$

符号法则（以靠近为正方向）：

- 分子：观察者**靠近**波源取"+"，**远离**取"−"
- 分母：波源**靠近**观察者取"−"，**远离**取"+"

> ### 例题 2.9（声呐测速——2023-24期末填空题10）
>
> 海床超声波发射器，$f = 30000\ \mathrm{Hz}$，水中声速 $c_s = 1500\ \mathrm{m/s}$。潜艇朝发射器靠近，反射波与入射波形成拍频 $f_{\mathrm{beat}} = 241\ \mathrm{Hz}$。求潜艇速度。
>
> **【解】**
>
> 设潜艇速度为 v。声波经潜艇两次多普勒效应后，接收频率为：
>
> $f_{\mathrm{ref}} = f \cdot \frac{c_s + v}{c_s - v}$
>
> 拍频 $f_{\mathrm{beat}} = f_{\mathrm{ref}} - f$，解得：
>
> $v = \frac{f_{\mathrm{beat}} \cdot c_s}{2f + f_{\mathrm{beat}}} = \frac{241 \times 1500}{60000 + 241} \approx 6.0\ \mathrm{m/s}$

> ### 例题 2.10（多普勒效应经典问题）
>
> 汽车以 $v_s = 20\ \mathrm{m/s}$ 靠近静止观察者，喇叭频率 $f = 1000\ \mathrm{Hz}$，声速 $v = 340\ \mathrm{m/s}$。
>
> (a) 观察者听到的频率；(b) 汽车超过后远离时的频率。
>
> **【解】**
>
> **(a)** $f' = f \cdot \dfrac{v}{v - v_s} = 1000 \times \dfrac{340}{320} = 1062.5\ \mathrm{Hz}$
>
> **(b)** $f'' = f \cdot \dfrac{v}{v + v_s} = 1000 \times \dfrac{340}{360} \approx 944.4\ \mathrm{Hz}$

> ### 例题 2.11（相速度与群速度——2023-24期末选择题4）
>
> 深水中海浪满足 $\omega^2 \lambda = 2\pi g$。求相速度 u_{ph} 与群速度 u_g 之比。
>
> **【解】**
>
> 由色散关系 $\omega^2 = gk$（$k = 2\pi/\lambda$）得 $\omega = \sqrt{gk}$。
>
> $u_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \qquad u_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{u_{\mathrm{ph}}}{2}$
>
> $\frac{u_{\mathrm{ph}}}{u_g} = 2 \quad \text{（选 A）}$

附录：振动与波核心公式速查

振动

物理量	公式	备注
运动方程	$\ddot{x}+\omega^2 x=0$	$\omega^2=k/m$
位移	$x=A\cos(\omega t+\phi)$	—
速度最大值	$v_{\max}=A\omega$	平衡位置处
加速度最大值	$a_{\max}=A\omega^2$	端点处
总能量	$E=\frac{1}{2}kA^2$	与 A^2 成正比
弹簧振子	$T=2\pi\sqrt{m/k}$	—
单摆	$T=2\pi\sqrt{L/g}$	小角度近似
物理摆	$T=2\pi\sqrt{I/(mgd)}$	d 为质心到轴距离
等效劲度系数	$k_{\text{eff}}=\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right\|_{x_0}$	稳定平衡点处

波

物理量	公式	备注
基本关系	$v=\lambda f$	—
波数	$k=2\pi/\lambda=\omega/v$	—
行波方程	$y=A\cos(kx-\omega t+\phi)$	沿 $+x$ 传播
弦上波速	$v=\sqrt{T/\mu}$	—
相速度	$u_{\text{ph}}=\omega/k$	—
群速度	$u_g=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$	色散介质中
平均功率	$\bar{P}=\frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2$	弦上
多普勒效应	$f'=f\cdot\dfrac{v\pm v_o}{v\mp v_s}$	靠近为正
拍频	$f_{\text{beat}}=\\|f_1-f_2\\|$	—
声速（气体）	$c_s=\sqrt{\gamma RT/M}$	—

驻波

量	公式
驻波方程	$y=2A\cos kx\cos\omega t$

量	公式
波节位置	$x=(n+\frac{1}{2})\lambda/2,\ n=0,1,2,\ldots$
波腹位置	$x=n\lambda/2,\ n=0,1,2,\ldots$
两端固定弦	$f_n=nv/(2L),\ n=1,2,3,\ldots$
一端固定弦	$f_n=(2n-1)v/(4L),\ n=1,2,3,\ldots$

tmp_f3b8d1e76c9ef56c7a72f49a9f7b60647b265f4f9e263c77.pdf
tmp_d6af1cabe54b86890396a27c45beaa613b6cae1d6d80cd7f.pdf
tmp_411f98f080dc52f8d9fb5044704b29e4682a7496ab815e62.pdf
tmp_620ac9ef892e404eacbb7cc4d143afd97c4cbd1429e49bef.pdf
tmp_4c49aad3814ccb3deb7353cba2718bc5aa9cf308d9f2e681.pdf
tmp_668317f7e74bcb67ad4acecda1179779b15de6e9050f73c7.pdf