我们如何描述——公理化的相对论

浙江大学《普通物理学 I(H)》辅学授课讲义答案版

作者：王郑浩

2026 年 5 月 27 日

引言：物理的本质与相对论的学习之道

我认为，物理学的本质是“精确地描述”。

很多同学认为相对论的推导很模糊，这似乎是一门“想当然”的学问，也很难说出为什么正确。最大的问题在于他们不知道怎么严谨地描述光、小车的运动，甚至不知道自己在描述什么。

很多人比起物理，更喜欢数学的确定性，因为他们很清楚自己在描述什么。数学拥有一套完善的符号系统，人们可以精确地描述自然语言所描述不了的东西。

实际上，相对论绝不是想当然，它是一套极其严谨的、可以高度数学化的系统。我们可以仅仅凭着几条公理，推导出钟慢效应、尺缩效应等几乎所有结论！

想要真正理解相对论，我们要做的第一件事，就是知道怎样用严谨的、统一的定义方式把物理过程描述清楚。当我们做到这一点后，就会惊喜地发现：沿着同一套数学逻辑，我们只需要进行简单的坐标和矩阵代入，就可以完美且毫无歧义地计算出所有相对论效应。

这次授课我们将抛弃所有直觉，从学会严谨的计算开始，真正弄懂狭义相对论。

王郑浩

2026 年 5 月 27 日于浙江大学

目录

第一章：破局利器——自然单位制 (Natural Units)

在复杂的相对论计算中，频繁带着光速 c 进行运算不仅繁琐，而且极易出错。为了让公式回归最纯粹的数学对称美，我们在学习洛伦兹变换前，首先引入“自然单位制”。

核心设定：令光速 $c = 1$。

在此设定下，保持空间的长度量纲不变，几个关键物理量的变换式如下：

- **速度**：$v \to \frac{v}{c}$（$\beta = \frac{v}{c}$ 是无量纲量，不需要变化）
- **时间**：$t \to ct$
- **质量**：$m \to mc^2$
- **动量**：$p \to pc$

相应的核心公式极简进化为：

- **质能方程**：$E = mc^2 \implies E = m$
- **能量-动量关系**：$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \implies E^2 = m^2 + p^2$
- **相对论速度变换**：纵向 $\dot{x}' = \frac{\dot{x} - \beta}{1 - \beta\dot{x}}$，横向 $\dot{y}' = \frac{\dot{y}}{\gamma(1 - \beta\dot{x})}$

自然单位制还原示例：以 $t' = \gamma t - \gamma\beta x$ 为例，代入时间 $t \to ct$、速度 $\beta = \frac{v}{c}$：

$$ct' = \gamma(ct) - \gamma\left(\frac{v}{c}\right)x$$

两边同除以 c：

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

【练习】已知自然单位制下的 y 方向相对论加速度变换公式为（使用牛顿记号 $\ddot{y}$ 表示加速度）：

$$\ddot{y}' = \frac{\ddot{y}}{\gamma^2(1 - \beta\dot{x})^2} + \frac{\ddot{x}\beta\dot{y}}{\gamma^2(1 - \beta\dot{x})^3}$$

请尝试按照自然单位制还原规则，推导出带光速 c 的标准单位制下的横向加速度变换公式。

注：本讲义后续所有章节，均默认在自然单位制 ($c = 1$) 下进行推导和计算。

第二章：我们如何描述——理解“事件”

为了公理化相对论系统，我们必须清楚自己在描述什么，必须清楚应该怎样描述。

学习相对论最困难、也是最核心的一步，就在于精准地描述出“事件”到底是什么。做到之后，就离真正懂得相对论就不远了。因此，我们必须首先明确以下基石概念。

1. 核心概念：“事件”与“世界线”

- **事件的公理化定义**：“事件”（Event）是时空几何中的一个点，具有唯一且确定的四维坐标 (x, y, z, t)。
- **世界线（World Line）**：物体在某个确定的时刻出现在某个确定的位置，这本身就是一个“事件”。一个物体在其运动演化的过程中，不同时刻出现在不同位置，**所有的这些事件在四维时空中连成的一条轨迹，就组成了该物体的世界线。**
- **概念辨析**：日常语境中的“事情”（如一辆行驶的车）往往持续一段时间、占据一片空间。但在狭义相对论中，用于计算的“事件”必须坍缩为 **时空中的一个确定的点**。

  理解了世界线，就能明白为什么日常语言不够严谨：物体每时每刻都在沿着它的世界线演化，每时每刻都客观存在并可被观测到。

  - **错误表达**：“物体 A 被观测”“物体 A 在 S 系中被观测”。*（原因：物体 A 拥有一条连续的世界线，这句话涵盖了世界线上无数个“观测事件”，它不能唯一确定某一个事件。）*
  - **正确表达**：“在 S 系中的时刻 t_0 观测物体 A ”。（原因：该事件是 A 的世界线与 S 系中 $t = t_0$ 的交点，时间和位置可以确定）
  - **正确表达**：“t 时刻，位于 S 系 (x, y, z) 处的闪光灯发出一道光”。
  - **正确表达**：“迎面飞行的物体 A 和物体 B 相遇”。（原因：在确定了两个物体的初始事件和速度之后，它们的两条世界线在四维时空中必然会相交于唯一的确定点，这个唯一的时空交点就是一个良定义的事件。）

2. 实际计算的不是“事件”，而是“坐标”

事件在四维时空中是绝对存在、客观不变的几何点，但对它的“坐标描述”却依赖于观测者所在的参考系。

- **同一参考系下的坐标唯一性**：在同一个参考系下，一个客观物理事件对应着唯一确定的一组时空坐标。

- **不同参考系间的坐标**：对于 **同一个事件**，在不同的惯性参考系（如 S 系与 S' 系）中，时间和空间坐标表示不同。
- **两组不同的时空坐标描述“同一个绝对的时空点”的充要条件**是：两组坐标表示满足 **洛伦兹变换**。

以上就是相对论的根本逻辑链，理解之后读者会豁然开朗。

第三章：解决所有问题的通法——洛伦兹变换矩阵

设 S' 系沿 x 轴正向以速度 β 相对静止观测者所在的 S 系运动，$t = t' = 0$ 时两系原点 O' 与 O 对齐。

1. 洛伦兹变换矩阵

在自然单位制下，同一个事件在 S 系与 S' 系的坐标满足极其对称的 **二维洛伦兹变换矩阵**：

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

2. 完整的四维时空矩阵

真实的物理时空是四维的，引入完整的 **四维洛伦兹变换矩阵**，可以更严密地展现时空的整体结构：

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

（注：在四维矢量中，我们通常习惯将时间 t 放在第一个坐标分量。你可以清晰地看到，矩阵的左上角 2×2 分块正是我们在 x 轴方向发生的核心变换，而右下角的单位矩阵代表 y 和 z 轴的恒等变换。）

3. 逆变换方程

从 S' 系的视角来看，S 参考系是相对于它以 $-\beta$ 的速度反向运动的。因此，**只需将矩阵中的 β 符号取反**即可得到逆变换（以四维为例）：

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

第四章：计算——严谨推导“钟慢效应”

【例题】（钟慢效应）一个时钟以速度 β 相对静止的观测者沿直线运动。静止观测者经历了时间 t 后，他看到这个运动时钟的示数增加了多少？

【精确描述】设静止观测者所在参考系为 S，时钟相对静止的参考系为 S'。S' 相对 S 沿 x 轴正向以速度 β 运动。

- **初事件（事件 1）**：“在 S 系 0 时刻观测时钟”。此时设两参考系原点对齐，该事件在 S, S' 系中坐标均为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。
- **末事件（事件 2）**：“在 S 系 t 时刻观测时钟”。
- 时钟的示数：即事件 2“在 S 系 t 时刻观测时钟”在 S' 系下时间坐标 t'。

问题转化为：已知初末事件在 S 系的坐标，求末事件在 S' 系中的时间坐标 t'（即时钟自身的示数）。

【解答过程】设初事件“在 S 系 0 时刻观测时钟”在 S, S' 系中坐标均为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，末事件“在 S 系 t 时刻观测时钟”坐标为 $(x, t), (x', t')$。

由题意，末事件在 S 系的时间坐标为 t。又因时钟相对 S' 系静止，其在 S' 系中的空间坐标始终位于原点，即 $x' = 0$。

将 t 与 $x' = 0$ 代入洛伦兹逆变换的时间方程：

$$t = \gamma\beta x' + \gamma t'$$

得：

$$t = 0 + \gamma t' \implies t' = \frac{t}{\gamma}$$

第五章：计算二——严谨推导“尺缩效应”

【例题】（尺缩效应）一把静长为 l_0 的尺子以速度 β 相对静止的观测者沿直线运动。静止观测者测量这把运动尺子的长度，测得的结果是多少？

【精确描述】设静止观测者所在参考系为 S，尺子相对静止的参考系为 S'。S' 相对 S 沿 x 轴正向以速度 β 运动。设尺子平行于 x 轴放置，两端分别为 A 端和 B 端。测量长度的本质，是要求在同一参考系中同时记录尺子两端的位置。

在哪个参考系测量，哪个参考系中两事件时间坐标相同。

- **事件 A**：“在 S 系 0 时刻测量尺子 A 端”。此时设两参考系原点与尺子 A 端对齐，该事件在 S, S' 系中坐标均为 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$。
- **事件 B**：“在 S 系 0 时刻测量尺子 B 端”。
- 尺子的测得长度：即事件 B“在 S 系 0 时刻测量尺子 B 端”在 S 系下的空间坐标 l。

问题转化为：已知两事件在 S 系的时间坐标相同（$t=0$），且尺子 B 端在 S' 系的空间坐标始终为静长 l_0，求事件 B 在 S 系中的空间坐标 l。

【解答过程】设事件 A“在 S 系 0 时刻测量尺子 A 端”在 S, S' 系中坐标均为 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，事件 B“在 S 系 0 时刻测量尺子 B 端”坐标为 $(x,t),(x',t')$。

由题意，事件 B 在 S 系的时间坐标为 $t=0$，空间坐标为 $x=l$。又因尺子相对 S' 系静止，其 B 端在 S' 系中的空间坐标恒为静长，即 $x'=l_0$。

将 $x=l$ 与 $t=0$ 代入洛伦兹正变换：

$$x' = \gamma x - \gamma\beta t$$

得：

$$l_0 = \gamma l - \gamma\beta\cdot 0 \implies l = \frac{l_0}{\gamma}$$

第六章：计算三——严谨推导“同时的相对性”

【例题】（同时的相对性与逻辑自洽） 两颗行星 A 和 B 在太空中相对静止，相距为 L，它们的时钟已经同步。一艘飞船 C 以恒定速度 β 从 A 飞向 B。当飞船经过行星 A 时，飞船将其自带的时钟与 A 的时钟同步，二者示数均为 0。

1. 请问：在飞船 C 刚刚经过 A 的那个瞬间（即飞船自身认为的“初始时刻”），飞船认为远处的行星 B 上的时钟示数是多少？
2. 飞船认为 A、B 距离因尺缩效应变短为 $\dfrac{L}{\gamma}$，飞完这段距离自己走过的时间是 $\dfrac{L}{\gamma\beta}$，则根据钟慢效应，飞船认为 B 的时钟在飞行期间只走过了 $\dfrac{L}{\gamma^2\beta}$。请说明为什么当飞船抵达 B 时，B 钟的最终示数依然是 $\dfrac{L}{\beta}$？

【精确描述】 设两颗行星所在的静止参考系为 S 系，飞船所在的运动参考系为 S' 系。S' 相对 S 沿 x 轴正向以速度 β 运动。在 S 系中，行星 A 位于坐标原点 $x_A = 0$，行星 B 位于 $x_B = L$。由于 A、B 时钟在 S 系中同步，它们共用同一个时间坐标 t。

【解答过程】

第 1 问：飞船初始时刻认为的 B 钟示数

设事件“飞船在自己的 0 时刻观测行星 B”坐标为 $(x, t), (x', t')$。由题意可知，该事件在 S' 系的时间坐标 $t' = 0$，在 S 系的空间坐标 $x = L$。

将 $t' = 0$ 与 $x = L$ 代入洛伦兹正变换的时间方程：

$$t' = \gamma t - \gamma\beta x$$

得：

$$0 = \gamma t - \gamma\beta L \implies t = \beta L$$

第 2 问：飞船视角的时空逻辑闭环

飞船系中，B 钟最终读数 = 初始读数 + 走过的时间。飞船测得航程为 $\dfrac{L}{\gamma}$，耗时 $\dfrac{L}{\gamma\beta}$；因钟慢效应，B 钟在此期间只走过 $\dfrac{L}{\gamma^2\beta}$。

加上初始读数 βL，并代入 $\dfrac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2$：

$$t_{\text{final}} = \beta L + \frac{L}{\gamma^2\beta} = \beta L + \frac{L(1-\beta^2)}{\beta} = \frac{L}{\beta}$$

第七章：相对论速度变换的微分推导

理解了坐标的洛伦兹变换，速度的变换可以直接通过坐标的微元（微分）相除得出。在自然单位制下，由正变换矩阵可得微分形式：

- $\mathrm{d}x' = \gamma\mathrm{d}x - \gamma\beta\mathrm{d}t$
- $\mathrm{d}t' = -\gamma\beta\mathrm{d}x + \gamma\mathrm{d}t$

设物体在 S 系中的速度分量为 $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$。

1. x **方向速度变换：**

$$\dot{x}' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma\mathrm{d}x - \gamma\beta\mathrm{d}t}{-\gamma\beta\mathrm{d}x + \gamma\mathrm{d}t}$$

分子分母同时除以 $\gamma\mathrm{d}t$：

$$\dot{x}' = \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \beta}{-\beta\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 1} = \frac{\dot{x} - \beta}{1 - \beta\dot{x}}$$

2. y **方向速度变换：**由于垂直于运动方向没有尺缩，所以 $\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y$，但 **时间依然膨胀！**

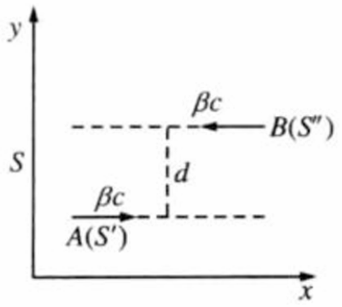
$$\dot{y}' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{-\gamma\beta\mathrm{d}x + \gamma\mathrm{d}t}$$

分子分母同时除以 $\mathrm{d}t$：

$$\dot{y}' = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\gamma(-\beta\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 1)} = \frac{\dot{y}}{\gamma(1 - \beta\dot{x})}$$

第八章：相对论运动学实战演练

压轴实战演练一：双飞船星际通讯



近图 2.3.1

【例题】（光行差与时空距离综合）在某恒星参考系 S 中，飞船 A 和飞船 B 均做匀速直线运动。飞船 A 的运动方向与 $+x$ 轴同向（速率为 β），飞船 B 的运动方向与 $-x$ 轴同向（速率也为 β），两飞船运动轨迹之间的垂直距离为 d。当 A 和 B 靠得最近时，从 A 向 B 发出一细束无线电联络信号。试问：

1. 为使 B 能接收到信号，A 中的宇航员认为发射信号的方向应与自己的运动方向之间成什么角？
2. 飞船 B 接收到信号时，B 中的宇航员认为自己与飞船 A 相距多少？

【精确描述】设恒星系为 S，飞船 A 的静止系为 S'，飞船 B 的静止系为 S''。

- S 系中：A 位于 $y=0$ 且速度为 β；B 位于 $y=d$ 且速度为 $-\beta$。
- “靠得最近时”：即 S 系中两飞船 x 坐标相同的时刻。设此时为原点 $(t,x,y)=(0,0,0)$。
- 事件 1（发射信号）：S 系中坐标为 $(t_1=0, x_1=0, y_1=0)$。
- 事件 2（接收信号）：S 系中，B 的轨迹为 $x=-\beta t$。因光速为 1，信号到达 B 时必满足 $x^2+y^2=t^2$，即 $(-\beta t)^2+d^2=t^2$。

解得信号飞行时间 $t_2=\dfrac{d}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma d$，故事件 2 在 S 系的坐标为

$$(t_2, x_2, y_2)=(\gamma d, -\beta\gamma d, d)$$

【解答过程】

第 1 问：求 A 认为的发射角

将事件 2 从 S 系变换到 A 所在的 S' 系（变换速度 β）：

$$t_2'=\gamma t_2-\gamma\beta x_2=\gamma(\gamma d)-\gamma\beta(-\beta\gamma d)=\gamma^2 d(1+\beta^2)$$

$$x_2' = \gamma x_2 - \gamma\beta t_2 = \gamma(-\beta\gamma d) - \gamma\beta(\gamma d) = -2\beta\gamma^2 d$$

因为光速恒为 1，发射角 θ' 的余弦值就是 x' 坐标与光飞行时间 t' 的比值：

$$\cos\theta' = \frac{x_2'}{t_2'} = -\frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

第 2 问：求 B 认为的相距距离

先求接收信号事件在 B 的静止系 S'' 中的发生时刻（从 S 变换到 S''，变换速度 $-\beta$）：

$$t_2'' = \gamma t_2 + \gamma\beta x_2 = \gamma(\gamma d) + \gamma\beta(-\beta\gamma d) = \gamma^2 d(1-\beta^2) = d$$

再求该瞬间（$t'' = d$）飞船 A 的位置。A 在 S 系的世界线为 $x = \beta t$，代入 S'' 的变换式：

$$x'' = \gamma(x + \beta t) = 2\gamma\beta t$$

$$t'' = \gamma(t + \beta x) = \gamma t(1+\beta^2)$$

两式相除消去 t，得到 A 在 S'' 系的轨迹方程：

$$x'' = \frac{2\beta}{1+\beta^2} t''$$

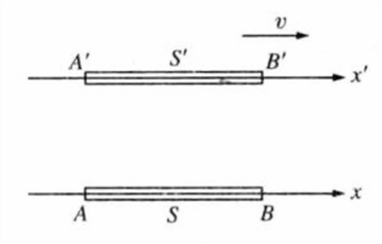
将接收时刻 $t'' = d$ 代入，得 A 此刻的横坐标：

$$x_A'' = \frac{2\beta d}{1+\beta^2}$$

因 B 恒定在 $y'' = d$ 处，A 恒在 $y'' = 0$ 处，两者空间距离为

$$D = \sqrt{(x_A'')^2 + d^2} = d\frac{\sqrt{1+6\beta^2+\beta^4}}{1+\beta^2}$$

压轴实战演练二：双尺对钟与光信号传递



近试图 4.1

【例题】（坐标时与时钟读数的剥离） 参考系 S' 相对惯性系 S 沿 $+x$ 方向以速度 β 匀速运动。两根静止长度相同的细长直尺 $A'B'$ 和 AB（设静长为 L_0），分别静置于 S' 系和 S 系的 x 轴上。端点上的四个钟计时率已按相对论要求调好，但零点是按以下"相遇对表"方式确定的：当 A' 钟与 A 钟相遇时，两钟均调到零点；当 B' 钟与 B 钟相遇时，两钟均调到零点。设 A' 与 A 相遇时，A' 发出光信号。已知 B' 接收到该信号时，B' 钟的读数为 1 个时间单位。

1. 试问 B 接收到该信号时，B 钟的读数为多少个时间单位？
2. 若 B' 接收到信号后，立即发出应答光信号。试问：(a) A' 接收到该信号时，A' 钟读数？(b) A 接收到该信号时，A 钟读数？

【精确描述】这一题的难点在于 **区分"坐标系本身的绝对时间 (t)"和"被人为偏移过的时钟读数 (T)"**。设两参考系原点在 A 与 A' 相遇时重合。

- 事件 1（A 端相遇并发光）：作为时空原点。在 S 和 S' 系中坐标均为 $(x = 0, t = 0)$。因此 A 钟读数 $T_A = t$，A' 钟读数 $T_{A'} = t'$。
- 两尺坐标：S 系中 B 固定在 $x = L_0$；S' 系中 B' 固定在 $x' = L_0$。
- 事件 2（B 端相遇对表）：发生于 B 与 B' 重合时，即空间坐标为 $x = L_0$ 且 $x' = L_0$ 的时空交点。

代入洛伦兹正变换 $x' = \gamma(x - \beta t)$，即

$$L_0 = \gamma(L_0 - \beta t)$$

解得该事件在 S 系的坐标时间

$$t_m = \frac{L_0}{\beta}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$$

同理，代入逆变换解得其在 S' 系的坐标时间 $t'_m = -t_m$。由于此事件发生时 B 和 B' 钟均被强行调零，所以这两只钟的"表盘读数"与"系统的坐标时间"存在一个固定的常数差：

$$T_B = t - t_m$$

$$T_{B'} = t' - t'_m = t' + t_m$$

【解答过程】

第 1 问：B 钟的读数

光信号从原点出发，S' 系中走到 $x' = L_0$ 处所需坐标时间 $t' = L_0$。此时 B' 钟读数为

$$T_{B'} = L_0 + t_m = 1$$

光在 S 系中走到 $x = L_0$ 处所需坐标时间 $t = L_0$。此时 B 钟读数为

$$T_B = L_0 - t_m$$

利用已知条件 $L_0 + t_m = 1$，求两钟读数之比：

$$\frac{T_B}{T_{B'}} = \frac{L_0 - t_m}{L_0 + t_m} = \frac{1 - \dfrac{1 - 1/\gamma}{\beta}}{1 + \dfrac{1 - 1/\gamma}{\beta}} = \frac{\beta\gamma - \gamma + 1}{\beta\gamma + \gamma - 1}$$

代入 $\beta\gamma = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 与 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，可化简为多普勒因子：

$$\frac{T_B}{T_{B'}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

因已知 $T_{B'} = 1$，故 B 钟收到信号时的读数为

$$T_B = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

第 2 问 (a)：A' 钟的读数

应答信号在 S' 系中从 $x' = L_0$ 返回 $x' = 0$，所需坐标时间也为 L_0。因此接收时光返回起点的总坐标时间 $t' = 2L_0$，且 $T_{A'} = t'$。

由 $L_0 + t_m = 1$，即

$$L_0\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma}\right) = 1$$

解得

$$L_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)$$

所以

$$T_{A'} = 2L_0 = 1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

第 2 问 (b)：A 钟的读数

发出应答光信号的事件在 S' 系的坐标为 $(x' = L_0, t' = L_0)$。利用逆变换求其在 S 系的发出坐标：

$$x_3 = \gamma(x' + \beta t') = \gamma L_0(1+\beta) = L_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$t_3 = \gamma(t' + \beta x') = \gamma L_0(1+\beta) = L_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

应答光从 x_3 飞回 S 系的原点 A，沿 $-x$ 方向传播，所需时间

$$\Delta t = x_3 = L_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

故 A 接收时的总坐标时间为

$$t = t_3 + \Delta t = 2L_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

因 $T_A = t$，代入上一小问求得的 $2L_0$：

$$T_A = \left(1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + 1$$

第九章：四维动量——能量与动量的洛伦兹变换

相对论动力学只需要记住两个公式：

1. 能量-动量关系式（绝对不变量）：

$$E^2 = m_0^2 + p^2$$

2. 能量与动量的洛伦兹变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ E \end{bmatrix}$$

1. 为什么 (E, p) 满足洛伦兹变换？

相对论中坐标时间 t 是相对的，不能作为统一的求导基准。我们需要用绝对不变量——**固有时** τ（原时）。

定义“四维动量”为静止质量 m_0 乘以“四维速度”：

$$P = m_0 \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

代入时间膨胀公式 $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ 及 $v_x = \frac{dx}{dt}$（自然单位制 $c = 1$）：

- **时间分量**：$m_0 \frac{dt}{d\tau} = m_0\gamma = E$ （总能量）
- **空间分量**：$m_0 \frac{dx}{d\tau} = m_0 \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = m_0\gamma v_x = p_x$ （动量）

核心结论：因为静止质量 m_0 和固有时 τ 都是绝对不变量，**对时空坐标的洛伦兹变换等式两边，直接同乘 m_0 并对 τ 求导，就立刻得到了能量-动量变换**。因此，四维动量 (E, p_x, p_y, p_z) 服从与时空坐标完全相同的洛伦兹变换矩阵！

2. 能量-动量的洛伦兹变换矩阵

对时空坐标的洛伦兹变换等式两边，直接同乘 m_0 并对 τ 求导，就立刻得到了能量-动量变换：

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ E \end{bmatrix}$$

完整的四维动量矩阵变换为：

$$\begin{bmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

3. 不变量的深层统一

洛伦兹变换本质上是四维空间的"旋转"，必然存在旋转下的 **绝对不变量**。既然时空坐标与四维动量的变换矩阵完全相同，它们的不变量也必定具有高度对称的同构形式：

- **时空不变量（固有时平方）**：$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \tau^2$
- **动量不变量（静质量平方）**：$E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2$

*(注：为什么动量的不变量常数是 m_0^2？只需在物体的**静止参考系**中看一眼：此时动量 $p = 0$，总能量仅剩静止质量 $E = m_0$，代入即得。)*

4. 动力学实战：相对论完全非弹性碰撞

【例题】（静质量的不守恒与不变性）两个静止质量均为 m_0 的粒子发生正面相撞（完全非弹性碰撞），碰撞后合成了一个新的大粒子。已知碰撞前，粒子 1 沿 x 轴正向以速度 $\beta_1 = 0.8$ 运动，粒子 2 沿 x 轴负向以速度 $\beta_2 = -0.6$ 运动。试求：

1. 在实验室参考系（静止系）中求：(A) 合成新粒子的静止质量 M_0；(B) 合成新粒子的速度 β。
2. 用质心系的方法求实验系中的：(B) 合成新粒子的速度 β；(A) 合成新粒子的静止质量 M_0。

【精确描述】孤立系统的**总四维动量** (E, p) 永远守恒。同时，所谓"质心系"，在相对论中被严谨地定义为 **系统总动量为零的参考系**（零动量系）。

【解答过程】

先求碰撞前两粒子的洛伦兹因子：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{5}{3}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(-0.6)^2}} = \frac{5}{4}$$

系统总能量与总动量为

$$E = (\gamma_1 + \gamma_2)m_0, \qquad p = (\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2)m_0$$

方法一：动量-能量直接法（实验室系）

(A) 求静止质量 M_0**：**利用绝对不变量 $M_0^2 = E^2 - p^2$：

$$M_0 = m_0\sqrt{(\gamma_1+\gamma_2)^2 - (\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2)^2} = m_0\sqrt{2 + 2\gamma_1\gamma_2(1-\beta_1\beta_2)}$$

代入数值得

$$M_0 = m_0\sqrt{2 + 2\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot[1-0.8(-0.6)]} = \frac{7\sqrt{6}}{6}m_0$$

(B) 求速度 β**：**利用 $\beta = \dfrac{p}{E}$：

$$\beta = \frac{\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\frac{5}{3}(0.8) + \frac{5}{4}(-0.6)}{\frac{5}{3} + \frac{5}{4}} = 0.2$$

方法二：质心系法（洛伦兹矩阵映射）

质心系即总动量 $p' = 0$ 的参考系，该系相对实验室系的速度即为新粒子的速度 β。系统在质心系中的总能量 E' 即为新粒子的静止质量 M_0。

(B) 求速度 β**：**由洛伦兹动量变换 $p' = \gamma(p - \beta E) = 0$ 得

$$\beta = \frac{p}{E} = \frac{\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = 0.2$$

此时质心系对应的洛伦兹因子为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.2^2}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

(A) 求静止质量 M_0**：**由洛伦兹能量变换，并将 $p = \beta E$ 代入：

$$M_0 = \frac{E}{\gamma} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma} m_0 = \frac{5/3 + 5/4}{5/(2\sqrt{6})} m_0 = \frac{7\sqrt{6}}{6} m_0$$

5．动力学实战：一般方向光的多普勒效应与光行差

【例题】（多普勒效应与光行差）在静止参考系 S 中，一束频率为 ν 的光线在 $x-y$ 平面内沿与 x 轴正半轴成 θ 角的方向传播。现有一个观察者（所在参考系为 S' 系）沿 x 轴正方向以恒定速度 β 运动。试用四维动量洛伦兹变换矩阵的方法求：

1. 观察者看到的光线频率 ν'（多普勒效应）。
2. 观察者看到的光线传播方向 $\cos\theta'$（光行差）。

【精确描述】光子是静止质量 $m_0=0$ 的粒子，在自然单位制（$c=1$）下，其能量-动量关系为 $E=p$。由于量子关系 $E=h\nu$（h 为普朗克常数），光子的能量和动量大小均为 $h\nu$。

【解答过程】

第一步，写出光子在静止系 S 中的四维动量坐标列向量。因为光子沿与 x 轴正向成 θ 角的方向传播，所以动量的 x,y 分量分别为 $p_x=h\nu\cos\theta$、$p_y=h\nu\sin\theta$：

$$P=\begin{bmatrix}E\\p_x\\p_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h\nu\\h\nu\cos\theta\\h\nu\sin\theta\end{bmatrix}$$

第二步，用洛伦兹矩阵将状态映射到观察者所在的 S' 系（变换速度为 β）：

$$\begin{bmatrix}E'\\p'_x\\p'_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma&-\gamma\beta&0\\-\gamma\beta&\gamma&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\nu\\h\nu\cos\theta\\h\nu\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h\nu\gamma(1-\beta\cos\theta)\\h\nu\gamma(\cos\theta-\beta)\\h\nu\sin\theta\end{bmatrix}$$

第三步，根据矩阵变换结果提取所需物理量。

求频率 ν'：观察者测量到的能量就是 $E'=h\nu'$，所以

$$h\nu'=h\nu\gamma(1-\beta\cos\theta)\implies\nu'=\nu\gamma(1-\beta\cos\theta)$$

求方向 $\cos\theta'$：在 S' 系中，光速依然为 1，即总动量大小等于总能量：$p'=E'$。传播方向的余弦值就是 x' 方向动量与总动量的比值：

$$\cos\theta'=\frac{p'_x}{p'}=\frac{p'_x}{E'}=\frac{h\nu\gamma(\cos\theta-\beta)}{h\nu\gamma(1-\beta\cos\theta)}=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$$

6. 动力学实战：康普顿散射 (Compton Scattering)

【例题】（康普顿散射）一个波长为 λ（能量为 $\frac{h}{\lambda}$，自然单位制下 $c=1$）的光子，沿 x 轴正方向射入，与一个静止质量为 m_0 的静止电子发生完全弹性碰撞。碰撞后，光子沿与 x 轴成 θ 角的方向散射，波长变为 λ'。试求光子波长的变化量 $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$。

【精确描述】在传统教学中，推导此公式通常需要画复杂的动量矢量三角形。但在这里，我们彻底抛弃画图和分量拆解，直接利用**四维动量内积的洛伦兹不变性**进行“降维打击”。

任意两个四维动量 A, B 的内积定义为 $A \cdot B = E_A E_B - \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B$。四维动量与自身的内积，恒等于其静质量的平方：$A^2 = m_0^2$（光子的自身内积恒为 0）。

【解答过程】

设入射光子 P，静止电子 P_0；散射光子 P'，反冲电子 P_0'。由四维动量守恒 $P_0' = P + P_0 - P'$，两边直接进行四维平方。代入 $P^2 = (P')^2 = 0$ 与 $(P_0)^2 = (P_0')^2 = m_0^2$，得：

$$m_0^2 = m_0^2 + 2(P \cdot P_0 - P \cdot P' - P_0 \cdot P')$$

即 $P \cdot P_0 - P_0 \cdot P' - P \cdot P' = 0$。

利用内积公式 $A \cdot B = E_A E_B - \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B$，直接展开三项：

$$m_0 \frac{h}{\lambda} - m_0 \frac{h}{\lambda'} - \frac{h^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\theta) = 0$$

等式两边同乘 $\frac{\lambda\lambda'}{h}$，一步得出波长位移：

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0}(1 - \cos\theta)$$

(注：还原为标准单位制，只需在分母补上 c，即 $\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$)

第十章：从闵氏时空推导洛伦兹矩阵

在前面的章节中，我们将洛伦兹矩阵作为公理直接引入。本章我们将以极简的代数方式证明：**洛伦兹变换仅是为了保持时空距离不变的一次“旋转”。**

1. 虚数坐标与正交旋转

光速绝对不变意味着时空线元在一切惯性系中守恒：$t^2 - x^2 = (t')^2 - (x')^2$。引入虚数时间坐标 it，该距离公式直接满足欧氏几何：

$$x^2 + (it)^2 = (x')^2 + (it')^2$$

二维的矩阵保持距离（平方和）不变只能是正交矩阵，二维正交矩阵只能是旋转矩阵。设旋转角为 θ：

$$\begin{bmatrix} x' \\ it' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ it \end{bmatrix}$$

2. 双曲矩阵的导出

展开上式并提取 i，重新写为作用于真实坐标 (x, t) 的矩阵：

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

因时空坐标为实数，θ 必为纯虚数。令 $\theta = i\eta$（η 称为快度），利用欧拉公式 $\cos(i\eta) = \cosh\eta$，$\sin(i\eta) = i\sinh\eta$，欧氏旋转蜕变为时空双曲矩阵：

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta & \cosh\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

3. 洛伦兹因子的物理映射

考察 S' 系原点（恒有 $x' = 0$），其在 S 系中以速度 β 运动（即 $\dfrac{x}{t} = \beta$）。代入双曲矩阵第一行：

$$0 = x\cosh\eta - t\sinh\eta \implies \tanh\eta = \frac{x}{t} = \beta$$

利用双曲恒等式 $\cosh^2\eta - \sinh^2\eta = 1$ 一步解出矩阵元素：

$$\cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\eta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma$$

$$\sinh\eta = \cosh\eta \cdot \tanh\eta = \gamma\beta$$

代回双曲矩阵，即得主宰时空的洛伦兹变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

【全篇结语】洛伦兹变换本质上只是在虚数坐标的复平面内，为维持距离守恒进行的二维正交旋转。前文的钟慢尺缩、光行差，甚至 $E^2 - p^2 = m_0^2$，皆是这一纯粹几何“旋转对称性”在三维物理世界中的必然投影。