# 光学专题复习

倪晟翔

2025 年 12 月 7 日

# 1 几何光学

## 1.1 光线模型与成像基础

几何光学的核心是**光线模型**

在光的波长远小于光学器件尺寸（$\lambda \to 0$）的近似下，即可忽略光的波动性，用带有方向的几何线——“光线”——来描述光的传播路径它是设计光学仪器的基础理论

### 1.1.1 基本概念

- **光源与物点**：发光或被照明的物体可视为无数发光点的集合，每个点称为一个物点
- **像点**：从物点发出的光线经光学系统作用后，其出射光线的实际交点或其反向延长线的交点，称为像点
- **实像与虚像**：光线实际汇聚所成的像称为实像，可用屏接收；光线反向延长线汇聚所成的像称为虚像，只能通过光学系统观察
- **实物与虚物**：入射到系统的光线发自实际存在的点，称为实物；入射光线是朝向某点会聚的（但尚未到达），则该点对系统而言是虚物
- **光束**：有一定关系的多条光线的集合，如同心光束、平行光束

### 1.1.2 几何光学基本实验定律

几何光学建立在以下四条基本实验定律之上：

1. **光的直线传播定律**：在各向同性均匀介质中，光沿直线传播
2. **光的独立传播定律**：来自不同方向或不同光源的光线在相交时互不影响，各自独立传播
3. **光的反射定律**
4. **光的折射定律**

### 1.1.3 费马原理

费马原理是几何光学的第一性原理，它概括了上述定律

- 光在两点间传播的实际路径，是光程取**极值**（通常是极小值）的路径

其中，光程是光在介质中传播的几何路径长度 $l$ 与该介质折射率 $n$ 的乘积，记为 $L = nl$

## 1.2 反射

### 1.2.1 反射定律

1. 入射光线、反射光线和法线在同一平面内（入射面）
2. 反射角 $i''$ 等于入射角 $i$，即
$$i = i''$$

### 1.2.2 平面镜

- **成像特点**：成等大、正立的虚像，且像与物关于镜面对称
- **成像作图**：利用对称性或反射定律

### 1.2.3 球面镜

- **凹面镜（会聚镜）**：反射面为球壳的内表面
- **凸面镜（发散镜）**：反射面为球壳的外表面
- **焦点**（$F$）：平行于主光轴的光线经球面镜反射后的实际汇聚点（凹面镜）或其反向延长线的汇聚点（凸面镜）
- **焦距**（$f$）：焦点到镜面顶点（光心 $O$）的距离它与球面曲率半径 $R$ 的关系为：
$$f = \frac{R}{2}$$
（暂时不考虑符号规则）

## 1.3 折射

### 1.3.1 折射定律

1. 入射光线、折射光线和法线在同一平面内（入射面）
2. 入射角 $i$ 的正弦值与折射角 $r$ 的正弦值之比，等于光在第二介质中的折射率 $n_2$ 与在第一介质中的折射率 $n_1$ 之比，即
$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

### 1.3.2 全反射

当光从光密介质（折射率 $n_1$ 大）射向光疏介质（折射率 $n_2$ 小）时，若入射角增大到某一临界值，折射角将达到 $90°$，此时折射光沿界面传播入射角再增大，则光全部反射回原介质

- **临界角** $i_c$：发生全反射的最小入射角
$$\sin i_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (n_1 > n_2)$$
- **应用**：光纤、全反射棱镜（单“反”镜头）

### 1.3.3 棱镜的折射与色散

- **偏向角** $\delta$：出射光线与入射光线延长线的夹角
- **最小偏向角** $\delta_{\mathbf{min}}$：当光线在棱镜内部对称传播（$i_1 = i_2'$）时，偏向角最小。此时有：
$$n = \frac{\sin \frac{A+\delta_{\min}}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$
其中 $A$ 为棱镜顶角。此式常用于精确测量材料的折射率
- **色散**：由于介质的折射率 $n$ 随光的波长 $\lambda$ 变化（$n = n(\lambda)$），不同颜色的光通过棱镜后偏向角不同，从而形成光谱

## 1.4 球面镜成像与薄透镜成像

要定量处理成像问题，必须先建立**符号法则**

### 1.4.1 符号法则

- **主轴**：连接球面曲率中心 $C$ 和镜面顶点（光心）$O$ 的直线
- **方向**：假设光线自左向右传播
- **长度量**：
  1. **物距** $u$：实物为 $+$，虚物为 $-$
  2. **像距** $v$：实像为 $+$，虚像为 $-$
  3. **焦距** $f$、曲率半径 $R$：凹面镜（会聚）为 $+$；凸面镜（发散）为 $-$
- **高度量**：主光轴上为正，下为负

### 1.4.2 球面反射成像公式

在 **傍轴光线**（光线与主光轴夹角很小）条件下，球面镜成像公式为：
$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$
此式对凹面镜和凸面镜均适用，只需代入带符号的 $u, v, f, R$ 即可

### 1.4.3 横向放大率 $m$

定义为像高 $y'$ 与物高 $y$ 之比

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{v}{u}$$

- $|m| > 1$：放大；$|m| < 1$：缩小
- $m > 0$：正立像；$m < 0$：倒立像

### 1.4.4 薄透镜成像

薄透镜是厚度可忽略的两个球面折射的组合

- **高斯成像公式**：
$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$
- **磨镜者公式**：焦距 $f$ 与透镜材料及形状的关系
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$
其中 $n$ 是透镜材料相对于周围介质的折射率，$R_1, R_2$ 是透镜两球面的曲率半径（带符号，按符号法则规定）
- **焦距符号**：凸透镜（会聚透镜）$f > 0$；凹透镜（发散透镜）$f < 0$
- **横向放大率**：$m = -\dfrac{v}{u}$

### 1.4.5 成像作图

1. 平行于主光轴的光线，经透镜后过焦点（或反向延长线过焦点）
2. 过焦点的光线，经透镜后平行于主光轴
3. 过光心的光线，方向不变

利用任意两条即可确定像点

## 1.5 光学系统

### 1.5.1 组合光学系统

复杂的光学仪器通常由多个透镜或反射镜组合而成

- **逐次成像法**：将第一个元件所成的像，作为第二个元件的物，依次应用成像公式计算

### 1.5.2 常用光学仪器原理

- **光学眼**：一个可调焦距的透镜（晶状体）和一个固定像距的屏（视网膜）。近视眼（像成在视网膜前）用凹透镜矫正；远视眼（像成在视网膜后）用凸透镜矫正
- **放大镜**：将物体放在其焦点以内，形成放大虚像。其角放大率 $M$ 为：
$$M = \frac{\theta'}{\theta} \approx \frac{25\ \text{cm}}{f} \quad (\text{明视距离为}25\,\text{cm})$$
- **显微镜**：由短焦距的物镜和长焦距的目镜组成。物镜成实放大像于目镜焦点内侧，目镜再将该像放大为虚像。总放大率为物镜横向放大率 $m_o$ 与目镜视角放大率 $M_e$ 的乘积
$$M = m_o \times M_e$$
- **开普勒望远镜**：由长焦距的物镜和短焦距的目镜组成，两者焦点重合，有中间像面。物镜将远处物体成实像于其焦平面附近（像很小），目镜将该像放大为虚像其 **角放大率** $M$ 为：
$$M = -\frac{f_o}{f_e}$$
- **伽利略望远镜**：伽利略式望远镜目镜为凹透镜，成正像，没有中间像面

## 1.6 * 光学系统的像差

实际光学系统所成的像与理想成像之间存在偏差，称为**像差**。产生原因主要是近轴条件不满足（单色像差）和折射率随波长变化（色差）

### 1.6.1 主要单色像差

- **球差**：轴上物点发出的宽光束中，边缘光线与傍轴光线聚焦点不同
- **彗差**：近轴物点发出的宽光束，成像为彗星状光斑
- **像散**：离轴物点发出的光束，其子午面（含主光线和光轴的面）与弧矢面（垂直子午面的面）的光线聚焦在不同位置
- **场曲**：平面物清晰成像于一个弯曲的像面上
- **畸变**：横向放大率随视场角变化，导致像的几何形状失真（桶形畸变、枕形畸变）

### 1.6.2 色差

- **位置色差（轴向色差）**：不同波长的光焦距不同，导致成像位置沿轴分布
- **放大率色差（横向色差）**：不同波长的光横向放大率不同，导致像的边缘出现彩边

## 1.7 * 矩阵光学

矩阵光学是用矩阵工具处理傍轴光线在光学系统中传播的方法，适用于复杂系统的分析

### 1.7.1 基本思想

在傍轴近似下，一条光线的状态可用一个列向量 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix}$ 表示，其中 $y$ 是光线与主光轴的垂直距离，$\theta$ 是光线的方向角。光学元件的作用用一个 $2 \times 2$ 矩阵表示

### 1.7.2 基本变换矩阵

设光线从左侧入射，向右传播

- **在均匀介质中传播距离 $d$：**

$$T(d) = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **薄透镜（焦距 $f$）：**

$$L(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.7.3 系统矩阵

一个由 $k$ 个元件组成的系统，其总变换矩阵 $M$ 等于各元件矩阵按光线传播顺序的 **反向乘积**（光线先经过的矩阵在右）：

$$M = M_k \cdots M_2 M_1$$

出射光线状态向量为：

$$\mathbf{r}_{\mathrm{out}} = M\mathbf{r}_{\mathrm{in}}$$

### 1.7.4 应用示例

从系统矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可以方便地求出系统的等效焦距、主点位置等例如，成像条件（物像关系）与矩阵元素有关

# 2 物理光学

物理光学主要研究光的波动性质，包括干涉、衍射和偏振等现象。它与几何光学的根本区别在于，物理光学认为光是一种电磁波，其传播遵循波动方程，需要考虑波前、相位等概念。

## 2.1 光的干涉

干涉现象是波动性的最直接体现。当两列或多列光波在空间相遇时，其叠加区域的强度分布呈现稳定的强弱变化，称为干涉条纹。

### 2.1.1 光的相量表示法

在分析光的干涉、衍射以及复杂光学系统的波动特性时，使用相量（Phasor）表示法可以简化正弦（或余弦）振动的叠加运算，将复杂的三角函数求和问题转化为几何叠加问题。

- **相量概念**：对于一个简谐振动 $E(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$，可以用一个在复平面上以角速度 $\omega$ 逆时针旋转的矢量来表示，这个矢量称为相量。通常，我们只关心振动的振幅和相对相位，因此可以将其表示为复振幅 $\widetilde{E}$：

  $$\widetilde{E} = Ae^{i\varphi}$$

  其中，$A$ 为振幅，$\varphi$ 为初相位。振动的瞬时值是该复振幅乘以 $e^{i\omega t}$ 后取实部，即 $E(t) = \mathrm{Re}[\widetilde{E}e^{i\omega t}]$。

- **相量叠加**:若有多个同频率的简谐振动 $E_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), E_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, $\ldots$, $E_n(t) = A_n\cos(\omega t + \varphi_n)$ 在空间某点相遇，其合振动 $E(t) = \sum_{k=1}^{n} E_k(t)$。

  使用相量法，合振动的复振幅等于各分振动复振幅的矢量和（复数求和）：

  $$\widetilde{E}_{合} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{E}_k = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\varphi_k}$$

  合振动的振幅 $A_{合}$ 和初相位 $\varphi_{合}$ 由下式给出：

  $$A_{合} = \left|\widetilde{E}_{合}\right|, \quad \varphi_{合} = \arg\left(\widetilde{E}_{合}\right)$$

  合振动的光强 $I_{合}$ 正比于振幅的平方：

  $$I_{合} \propto A_{合}^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\varphi_k}\right|^2$$

### 2.1.2 相干条件与干涉模型

并非任意两列光波都能产生稳定的干涉条纹。产生稳定干涉必须满足以下**相干条件**：

1. **频率相同**：两列波的振动频率必须相同。

2. **振动方向相同或具有平行分量**：两列波的电场振动方向不能垂直，否则平均叠加效果为零。

3. **相位差恒定**：两列波在相遇点的相位差必须不随时间随机变化，即要求波源是相干的。

- **干涉强度**：设两列相干光波在相遇点的电场矢量分别为 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10}\cos(\omega t + \varphi_1)$ 和 $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$，且振动方向相同。则叠加后的光强 $I$ 为：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

  其中，$I_1$、$I_2$ 分别为两列波单独存在时的光强，$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$ 是它们在该点的相位差，$\lambda$ 为光在介质中的波长，$r_2 - r_1$ 为光程差 $\Delta L$。

- **干涉极值条件**：

$$\begin{aligned}
&\text{相长干涉（明纹）}: \delta = 2k\pi, \quad \Delta L = k\lambda, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \\
&\text{相消干涉（暗纹）}: \delta = (2k+1)\pi, \quad \Delta L = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots
\end{aligned}$$

- **获得相干光的方法**：由于普通光源发光是大量原子独立、随机辐射的过程（非相干），必须将同一波列分解为两部分，使其经过不同路径后再相遇。主要方法有：
  - **分波前法**：让波前上的不同部分作为次波源。
  - **分振幅法**：利用界面的反射和折射，将一束光的振幅分为两部分。

### 2.1.3 空间相干性与时间相干性

在实际干涉实验中，由于光源的非理想特性（非点光源、非单色光），干涉条纹的清晰度会受到限制。这引出了空间相干性和时间相干性的概念。

- **空间相干性**：
  - **定义**：描述在垂直于光传播方向的横向空间不同点上，光波场相位关联的程度。它主要受光源的**尺寸**影响。
  - **光源尺寸的影响**：实际光源总有一定大小，可看作由许多互不相干的点光源组成。每个点光源产生一套自己的干涉条纹，这些条纹在观察屏上相互错位叠加，导致总光强分布中的对比度（可见度）下降。
  - **空间相干宽度 $d_c$**：在给定光源尺寸和距离下，能够产生清晰干涉条纹的两个空间点之间的最大横向距离。
  - **估算公式**：对于一个宽度为 $b$ 的普通扩展光源（例如狭缝），在双缝干涉（杨氏干涉）中，为了观察到清晰的条纹，双缝间距 $d$ 必须满足：

$$d \lesssim d_c = \frac{\lambda}{\beta}$$

    其中 $\beta = b/L$ 是光源对双缝所在处的张角（$L$ 为光源到双缝平面的距离），$\lambda$ 为光波波长。光源越宽（$\beta$ 越大），空间相干宽度 $d_c$ 越小，空间相干性越差。

– **应用意义**：空间相干性限制了干涉装置中两束光分离点的最大横向距离。例如，在杨氏双缝实验中，需要使用窄缝或点光源来保证足够好的空间相干性。

- **时间相干性**：
  – **定义**：描述光波场在沿传播方向的同一空间点上，不同时刻的相位关联程度。它主要受光源的**单色性**影响。
  – **准单色光与波列模型**：非激光光源发出的光并非严格的单色光，而是**准单色光**。其光谱（频率分布）不是一条无限细的谱线，而存在一定的宽度 $\Delta\nu$（或 $\Delta\lambda$）。在时域上，这样的光可以看作是一系列频率和振幅缓慢变化、相位随机的有限长波列的集合。
  – **相干时间 $\tau_c$ 与相干长度 $L_c$**：
    * **相干时间 $\tau_c$**：一个波列的平均持续时间，可以理解为光场保持相位相关性的时间尺度。
    * **相干长度 $L_c$**：在相干时间 $\tau_c$ 内光传播的距离，即波列的平均空间长度：$L_c = c \cdot \tau_c$，其中 $c$ 为介质光速。
  – **与光谱宽度的关系**：波列的有限长度（时间相干性有限）直接源于光源的非单色性。根据傅里叶变换，光谱宽度 $\Delta\nu$ 与相干时间 $\tau_c$ 成反比，与相干长度 $L_c$ 也成反比。具体关系为：
$$\tau_c \approx \frac{1}{\Delta\nu}, \quad L_c = c \cdot \tau_c \approx \frac{c}{\Delta\nu}$$
或用波长表示为（设中心波长为 $\lambda_0$）：
$$L_c \approx \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$
**光源的单色性越好（$\Delta\nu$ 或 $\Delta\lambda$ 越小），相干时间 $\tau_c$ 和相干长度 $L_c$ 就越长，时间相干性就越好。**

### 2.1.4 分波前干涉

典型的代表是**杨氏双缝干涉实验**。

- **实验装置**：一个单色点光源（或线光源）照亮一个开有两个平行狭缝 $S_1$、$S_2$ 的不透明屏，在远处的观察屏上出现等间距的明暗相间直条纹。
- **光程差与条纹位置**：设双缝间距为 $d$，双缝到观察屏的距离为 $D$（$D \gg d$），屏上某点 $P$ 到屏中心 $O$ 的距离为 $x$。则 $S_1$、$S_2$ 到 $P$ 点的光程差近似为：
$$\Delta L \approx \frac{d}{D}x$$
- **明暗纹位置**：
$$\text{明纹中心}: x = k\frac{D\lambda}{d}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$
$$\text{暗纹中心}: x = (2k+1)\frac{D\lambda}{2d}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

- 条纹间距（相邻明纹或暗纹间的距离）：

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d}$$

可见，波长 $\lambda$ 越大，或双缝距离 $d$ 越小，条纹间距越大。

### 2.1.5 分振幅干涉

典型的代表是**薄膜干涉**和**迈克尔逊干涉仪**。

- **薄膜干涉（等厚干涉与等倾干涉）**：
  - **光程差公式**：考虑一束光入射到厚度为 $e$、折射率为 $n$ 的薄膜上，经上下表面反射后产生两束相干光。它们的光程差为：

    $$\Delta L = 2ne\cos\theta_t + \delta'$$

    其中 $\theta_t$ 是薄膜内的折射角，$\delta'$ 是由半波损失引起的附加光程差（通常为 0 或 $\lambda/2$）。
  - **半波损失**：当光从光疏介质射向光密介质并在界面反射时，反射光会发生 $\pi$ 的相位突变，相当于附加了 $\lambda/2$ 的光程差。
  - **等厚干涉**（如劈尖、牛顿环）：入射光为平行光或以小角度入射，光程差主要取决于薄膜厚度 $e$。同一条纹对应于相同的厚度 $e$。
    * **劈尖干涉**：两片平板玻璃一端夹一薄片构成空气劈尖。明暗纹条件为：

      $$2ne + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & \text{明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & \text{暗纹} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

      相邻明（或暗）条纹对应的厚度差为 $\Delta e = \lambda/(2n)$。
    * **牛顿环**：平凸透镜与平面玻璃接触形成空气薄膜。干涉条纹是以接触点为中心的同心圆环。明暗环半径 $r$ 满足：

      $$r^2 \approx \begin{cases} (2k-1)R\frac{\lambda}{2}, & \text{明环} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ kR\lambda, & \text{暗环} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

      其中 $R$ 为透镜曲率半径。
  - **等倾干涉**（如平行平面薄膜）：薄膜厚度 $e$ 均匀，光程差 $\Delta L$ 主要取决于入射角 $\theta_i$（或折射角 $\theta_t$）。具有相同入射角的光线，其干涉结果相同，形成同心圆环条纹。

- **迈克尔逊干涉仪**：
  - **结构与原理**：利用分振幅法产生两束相干光，分别经过两个垂直的反射镜 $M_1$、$M_2$ 反射后返回叠加。其中 $M_1$ 可精密移动。光束由一块半透半反的分光板 $G_1$ 分为两束，并由一块补偿板 $G_2$ 补偿光程。
  - **干涉图样**：当 $M_1$ 与 $M_2$ 严格垂直时，产生等倾干涉圆环；当 $M_1$ 与 $M_2$ 不垂直时，产生等厚干涉直条纹。

## 2.2 光的衍射

当光在传播过程中遇到障碍物（其尺寸与波长可比拟）时，会偏离直线传播，并形成复杂的光强分布，这种现象称为衍射。

### 2.2.1 衍射原理与分类

- **惠更斯-菲涅尔原理**：
  - **惠更斯子波**：波前上的每一点都可以看作新的球面次波（子波）的波源。
  - **菲涅尔补充**：空间中任一点的光振动，是波前上所有子波源在该点引起的振动的相干叠加。
- **衍射的分类**：
  - **菲涅尔衍射（近场衍射）**：光源和观察屏（或二者之一）到衍射孔的距离是有限的。
  - **夫琅禾费衍射（远场衍射）**：光源和观察屏都距离衍射孔无限远（或等效于无限远，通过透镜实现）。其衍射图样是衍射孔（或障碍物）的**空间频谱**

### 2.2.2 单缝与圆孔夫琅禾费衍射

- **单缝衍射**：
  - **装置**：平行光垂直入射宽度为 $a$ 的狭缝，通过透镜在焦平面上观察。
  - **半波带法分析**：将单缝处波前分成若干个等宽的窄带（半波带），使得相邻半波带上对应点发出的子波到屏上 $P$ 点的光程差为 $\lambda/2$。$P$ 点的明暗取决于半波带的个数。
  - **衍射暗纹条件**（中心明纹除外）：

    $$a\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

    其中 $\theta$ 是衍射角（衍射光与主光轴的夹角）。满足此式的 $\theta$ 方向出现暗纹。
  - **明纹近似条件**：

    $$a\sin\theta \approx \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

    注意，次极大（其他明纹）的强度远小于中央明纹。
  - **中央明纹宽度**：两个一级暗纹之间的角宽度为 $2\theta_1 \approx 2\lambda/a$。线宽度（屏上）为 $\Delta x_0 \approx 2f\lambda/a$，其中 $f$ 为透镜焦距。
- **圆孔衍射**：
  - **艾里斑**：平行光垂直通过半径为 $R$ 的圆孔，在观察屏上得到中央是一个明亮圆斑（爱里斑），周围是明暗相间的同心圆环。

– **艾里斑角半径**：

$$\theta_1 \approx 0.61\frac{\lambda}{R} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

其中 $D = 2R$ 是圆孔直径。

### 2.2.3 衍射光栅与光谱仪

衍射光栅是由大量等宽、等间距的平行狭缝构成的光学元件。它是光谱分析的核心器件。

- **光栅方程**：设光栅常数为 $d$（$d = a + b$，$a$ 为缝宽，$b$ 为不透光部分宽度），平行光垂直入射。在衍射角 $\theta$ 方向出现主极大的条件是：

$$d\sin\theta = k\lambda, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

此式称为光栅方程。$k$ 为主极大的级次。

- **光栅光谱特性**：
  - **色散**：除中央零级 $(k = 0)$ 外，对于给定的 $k$，不同波长 $\lambda$ 的主极大出现在不同的 $\theta$ 方向，从而将复色光展开成光谱。
  - **分辨本领** $R$：表征光栅分辨两个相近波长的能力。

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$$

  其中 $\Delta\lambda$ 是可分辨的最小波长差，$N$ 是光栅的总刻线数，$k$ 是光谱级次。$N$ 越大（光栅越宽，刻线越密），分辨本领越高。
  - **缺级现象**：由于单缝衍射的调制作用，某些本应出现的光栅主极大可能恰好落在单缝衍射的暗纹方向上，从而消失。缺级条件为：

$$\frac{d}{a} = \frac{\text{整数}}{\text{整数}} \quad \text{且} \quad k = \frac{d}{a}k', \quad k' = \pm1, \pm2, \dots$$

- **光谱仪**：利用光栅（或棱镜）的色散作用，将光分解为光谱并进行测量的仪器。

### 2.2.4 光学仪器分辨本领

任何光学仪器的通光孔（如透镜的边缘）都相当于一个圆孔，都会产生衍射效应，这限制了仪器分辨两个相距很近的物点的能力。

- **瑞利判据**：当一个物点的爱里斑中心，刚好落在另一个物点的爱里斑边缘（第一暗环）上时，这两个物点被认为是**刚好可以分辨**的。

- **最小分辨角**：根据瑞利判据，对于直径为 $D$ 的圆孔，其最小分辨角 $\theta_R$ 即为爱里斑的角半径：

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

- **分辨本领**：最小分辨角的倒数。望远镜的分辨本领直接由物镜的 $D$ 和 $\lambda$ 决定。显微镜的分辨本领则涉及物镜的数值孔径（$NA = n\sin u$，$n$ 为物方介质折射率，$u$ 为物镜的半孔径角），其最小可分辨距离为：

$$\delta y = 0.61\frac{\lambda}{NA}$$

### 2.2.5 衍射的傅里叶光学处理

传统的惠更斯-菲涅尔原理通过积分公式计算衍射场，计算过程较为复杂。我们可以采用傅里叶分析这一更强大和系统化的工具来处理衍射问题，特别是夫琅禾费衍射

#### 衍射的线性系统理论

- **衍射孔函数**：定义一个二维的**孔径函数** $t(x_0, y_0)$ 来描述衍射屏。在不考虑屏的厚度和吸收时，可写为：

$$t(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & \text{在孔径内（透明）} \\ 0, & \text{在孔径外（不透明）} \end{cases}$$

  更一般地，$t(x_0, y_0)$ 可以是复函数，其模表示透射率，辐角表示屏引入的相位延迟。

- **屏后场的复振幅**：设垂直入射的单色平面波复振幅为 $U_0$，则紧贴屏后的光场复振幅分布为：

$$U(x_0, y_0) = U_0 \cdot t(x_0, y_0)$$

* **菲涅尔衍射** 根据惠更斯-菲涅尔原理，从衍射屏平面 $(x_0, y_0)$ 到观察平面 $(x, y)$ 的衍射过程，由**菲涅尔衍射积分**描述（傍轴近似下）：

$$U(x,y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty} U(x_0,y_0)\exp\left\{i\frac{k}{2z}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]\right\}dx_0dy_0$$

展开平方项并整理：

$$\begin{aligned}U(x,y) = {} & \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\exp\left[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\times \\ & \iint_{-\infty}^{\infty}\left\{U(x_0,y_0)\exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\right\}\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0\end{aligned}$$

这个表达式具有深刻的物理意义：

- 积分号内，$U(x_0, y_0)$ 被一个**二次相位因子** $\exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]$ 调制。
- 积分本身是调制后函数 $U(x_0, y_0)\exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]$ 的**二维傅里叶变换**。
- 变换的频率变量为：$f_x = \frac{x}{\lambda z}$，$f_y = \frac{y}{\lambda z}$。这与衍射角 $\theta_x \approx x/z$，$\theta_y \approx y/z$ 的关系为：$f_x = \frac{\sin\theta_x}{\lambda}$，$f_y = \frac{\sin\theta_y}{\lambda}$，称为**空间频率**。
- 积分前的因子包括一个常数、一个与传播距离 $z$ 相关的相位项 $\exp(ikz)$，以及一个**二次相位弯曲因子** $\exp\left[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]$。

因此，菲涅尔衍射场是孔径函数经过二次相位调制后的傅里叶变换。对于不同的衍射距离 $z$，需要计算不同的傅里叶变换。

**夫琅禾费衍射** 在**夫琅禾费近似**下，观察屏距离衍射屏足够远，满足：

$$z \gg \frac{k(x_0^2+y_0^2)_{\max}}{2}$$

此时，积分中的二次相位因子 $\exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right] \approx 1$，可以忽略。菲涅尔衍射积分简化为：

$$U(x,y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\exp\left[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\iint_{-\infty}^{\infty} U(x_0,y_0)\exp\left[-i2\pi\left(f_x x_0 + f_y y_0\right)\right]dx_0 dy_0$$

其中 $f_x = \frac{x}{\lambda z}$，$f_y = \frac{y}{\lambda z}$。

这给出一个极其重要的结论：

$$U(x,y) \propto \mathcal{F}\{U(x_0,y_0)\}_{(f_x,f_y)}$$

即在夫琅禾费近似下（通常由透镜实现），观察平面上的复振幅分布 $U(x,y)$，正比于衍射屏平面复振幅分布 $U(x_0,y_0)$ 的**二维傅里叶变换**，变换在空间频率 $(f_x,f_y)$ 处取值。

**物理意义**：夫琅禾费衍射图样（远场）是衍射屏透射函数（或孔径函数）的**空间频谱**。观察屏上的每一点 $(x,y)$ 对应一对空间频率 $(f_x,f_y)$，该点的光强 $I(x,y)=|U(x,y)|^2$ 反映了入射光波中所含该空间频率成分的“强度”。

**傅里叶方法计算典型衍射图样示例**

- **单缝衍射**：
  - 孔径函数：$t(x_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)$，其中 $\mathrm{rect}(u)$ 为矩形函数，缝宽为 $a$。
  - 屏后场（垂直入射平面波 $U_0$）：$U(x_0) = U_0 \cdot \mathrm{rect}(x_0/a)$。
  - 傅里叶变换：矩形函数的傅里叶变换是 sinc 函数：$\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(x_0/a)\} = a\cdot\mathrm{sinc}(af_x)$，其中 $\mathrm{sinc}(u) = \sin(\pi u)/(\pi u)$。
  - 夫琅禾费衍射场：
  $$U(x) \propto a\cdot\mathrm{sinc}\left(a\frac{x}{\lambda z}\right) = a\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{a\sin\theta}{\lambda}\right)$$
  - 光强分布：
  $$I(x) \propto |U(x)|^2 \propto \mathrm{sinc}^2\left(\frac{a\sin\theta}{\lambda}\right)$$
  这与用半波带法或积分法得到的结果完全一致。暗纹条件 $\sin\theta = k\lambda/a$ 由 sinc 函数的零点给出。
- **圆孔衍射**：
  - 孔径函数：$t(r_0) = \mathrm{circ}(r_0/R)$，其中 $\mathrm{circ}(u)$ 为圆域函数，$R$ 为圆孔半径。
  - 傅里叶变换：圆域函数的傅里叶变换是**一阶贝塞尔函数**的形式：
  $$\mathcal{F}\{\mathrm{circ}(r_0/R)\} \propto \frac{J_1(2\pi R\rho)}{R\rho}$$
  其中 $\rho = \sqrt{f_x^2+f_y^2}$ 是径向空间频率。

– 夫琅禾费衍射光强分布：

$$I(r) \propto \left[\frac{2J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda z}r\right)}{\left(\frac{2\pi R}{\lambda z}r\right)}\right]^2 = \left[\frac{2J_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}\right]^2$$

其中 $r$ 是观察屏上的径向距离，$J_1$ 是一阶贝塞尔函数。第一暗环（艾里斑边界）由 $J_1$ 的第一个零点决定：$kR\sin\theta_1 \approx 3.832$，即 $\sin\theta_1 \approx 1.22\lambda/D$。

- **衍射光栅：**
  - 孔径函数可以写为单个缝的透射函数 $t_1(x_0)$ 与一系列 $\delta$ 函数（表示缝的位置）的卷积。
  - 根据傅里叶变换的卷积定理，光栅夫琅禾费衍射图样是单个缝衍射图样（$t_1$ 的傅里叶变换）与光栅结构因子（$\delta$ 函数列的傅里叶变换）的乘积。
  - 结构因子的傅里叶变换是另一个 $\delta$ 函数列，决定了主极大的位置（光栅方程 $d\sin\theta = k\lambda$）。
  - 最终光强分布为：$I(\theta) \propto |\text{单缝衍射因子}|^2 \times |\text{多光束干涉因子}|^2$。这清晰地解释了光栅衍射的调制和缺级现象。

## 2.3 光的偏振

光是横波，其电场矢量（光矢量）的振动方向与传播方向垂直。偏振现象是光波横波性的直接证明，表明光矢量在垂直于传播方向的平面内具有特定的振动状态。

### 2.3.1 Jones 矢量表示法

**定义：**

- Jones 矢量是一种用于在二维复向量空间中**完全描述单色平面光波偏振态**的数学表示方法。
- 它描述了光波电矢量在垂直于传播方向的平面内，两个正交分量（通常取为 x 和 y 方向）的复振幅。

**Jones 矢量的标准形式：**

- 对于一个沿 z 方向传播的单色平面波，其电矢量可分解为：

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{bmatrix}$$

- 通常提取一个公共相位因子，并归一化强度，得到标准 Jones 矢量 **J**：

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{bmatrix} E_x e^{i\delta} \\ E_y \end{bmatrix}$$

其中 $\delta = \phi_y - \phi_x$ 是两个分量之间的相位差。

常见偏振态的 Jones 矢量：

- 沿 x 轴的线偏振光：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 沿 y 轴的线偏振光：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 与 x 轴成 $\theta$ 角的线偏振光：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

- 右旋圆偏振光（从光源看向观察者，电矢量顺时针旋转）：

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad (\delta = -\pi/2)$$

- 左旋圆偏振光（从光源看向观察者，电矢量逆时针旋转）：

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (\delta = \pi/2)$$

- 长轴沿 x 轴的椭圆偏振光：

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ Be^{i\delta} \end{bmatrix}$$

  其中 $A, B$ 为实振幅，$\delta$ 不为 $0, \pm\pi/2, \pi$。

### 2.3.2 偏振态与马吕斯定律

偏振分量的表示：

- **p 波**：电矢量振动方向平行于入射面的分量，又称平行分量
- **s 波**：电矢量振动方向垂直于入射面的分量，又称垂直分量（“s” 源自德文 “senkrecht”，意为垂直）
- 自然光可看作 p 波和 s 波强度相等、无固定相位关系的非相干叠加。
- **光的偏振态**：
  - **自然光**：普通光源（如太阳、白炽灯）发出的光，其光矢量在垂直于传播方向的所有方向上均匀分布且振幅相等，没有任何方向性优势。自然光可等效为两个振幅相等、振动方向相互垂直、无固定相位差的线偏振光的非相干叠加。

- **线偏振光**：光矢量只沿一个固定方向振动。其振动方向与传播方向构成的平面称为**振动面**。
- **部分偏振光**：光矢量在各方向都有振动，但在某一特定方向上振幅最大，与之垂直的方向上振幅最小。可看作是自然光与线偏振光的混合。
- **圆偏振光与椭圆偏振光**：光矢量的端点在垂直于传播方向的平面内的轨迹是一个圆或椭圆。这可以看作是两个频率相同、传播方向一致、振动方向相互垂直、且有固定相位差的线偏振光的合成。
  * 当两分量的振幅相等，且相位差为 $\pm\pi/2$ 时，合成圆偏振光（$\pi/2$ 为右旋，$-\pi/2$ 为左旋）
  * 其他情况合成椭圆偏振光

- **起偏器与检偏器**：
  - **起偏器**：能将自然光或部分偏振光转变为线偏振光的光学器件。其允许光矢量通过的方向称为**透振方向**。
  - **检偏器**：用于检查入射光偏振态的器件。本质上与起偏器相同。
- **马吕斯定律**：描述线偏振光通过检偏器后光强变化的规律。
  - 设入射到检偏器的线偏振光光强为 $I_0$，其振动方向与检偏器透振方向的夹角为 $\theta$。
  - 则出射光强 $I$ 为：

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

  - **推论**：
    * 当 $\theta = 0$ 或 $\pi$ 时，$I = I_0$，光强最大。
    * 当 $\theta = \pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时，$I = 0$，光强为零，称为**消光**。利用消光现象可以判断入射光是否为线偏振光。
    * 若入射光为自然光（强度 $I_0$），通过理想起偏器后，出射线偏振光的光强为 $I_0/2$。

### 2.3.3 反射与折射起偏

当自然光在两种各向同性介质的界面上发生反射和折射时，反射光和折射光一般都是部分偏振光，在一定条件下可以成为线偏振光。

- **布儒斯特定律**：
  - 当自然光以某一特定角 $i_B$ 入射时，反射光成为振动方向垂直于入射面的**线偏振光**（完全偏振光）。这个特定的入射角 $i_B$ 称为**布儒斯特角**或**起偏角**。

- 布儒斯特角 $i_B$ 满足：

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

其中 $n_1$、$n_2$ 分别为入射介质和折射介质的折射率。此式称为布儒斯特定律。
- 当以 $i_B$ 入射时，折射光为振动方向平行于入射面占优势的部分偏振光，且反射光线与折射光线相互垂直，即 $i_B + r = 90°$。

- 应用：
  - **获得线偏振光**：例如，外腔式激光器常在谐振腔两端安装布儒斯特窗，使得在窗片处以布儒斯特角入射的光，其平行于入射面的振动分量无反射损耗地通过，从而在腔内振荡并输出线偏振激光。
  - **减少反射光强**：摄影镜头等光学元件表面常镀增透膜，其原理之一便是利用布儒斯特角条件来减少特定偏振分量的反射。

### 2.3.4 * 双折射与波片

**双折射**

当一束光射入某些各向异性晶体（如方解石、石英）时，会分裂成两束沿不同方向传播的折射光，这种现象称为**双折射**。

分裂出的两束折射光都是线偏振光，且它们的振动方向相互垂直：

- **o 光（寻常光）**：遵守折射定律（$\sin i/\sin r_o = n_o$，常数）。它在晶体内各方向的传播速度相同，折射率 $n_o$ 为常数。
- **e 光（非寻常光）**：一般不遵守通常的折射定律。它在晶体内各方向的传播速度不同，折射率 $n_e$ 随方向变化。只有当光沿晶体光轴方向传播时，才有 $n_e = n_o$。
- **光轴**：晶体中存在的一个特殊方向。光沿此方向传播时，不发生双折射，o 光和 e 光传播方向和速度均相同。
  - **单轴晶体**：只有一个光轴，如方解石、石英、冰。
  - **双轴晶体**：有两个光轴，如云母、蓝宝石。
- **主截面**：包含晶体光轴和一条给定光线的平面。o 光的振动方向垂直于其主截面；e 光的振动方向平行于其主截面。
- **主平面**：晶体中，包含光轴并与晶体界面垂直的平面。当光线垂直入射界面时，主平面与主截面重合。

**波片**

波片（又称相位延迟片）是用双折射晶体制成的平行平面薄片，其光轴通常与表面平行。

- **原理**：当一束线偏振光垂直入射到波片上时，会分解为振动方向相互垂直的 o 光（振动垂直于光轴）和 e 光（振动平行于光轴）。它们在波片内传播方向相同，但由于折射率不同 ($n_o \neq n_e$)，传播速度也不同。穿过厚度为 $d$ 的波片后，两束光之间会产生一个相位差 $\delta$：

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}|n_o - n_e|d$$

其中 $\lambda$ 为光在真空中的波长。

- **常用波片**：

1. **四分之一波片 ($\lambda/4$ 波片)**
厚度满足 $|n_o - n_e|d = \lambda/4$（或其奇数倍），产生的相位差 $\delta = \pi/2$（或 $\pi/2 + 2k\pi$）。
   - **功能**：可将线偏振光转换为椭圆（或圆）偏振光，反之亦然。
   - **条件**：当入射的线偏振光振动方向与波片光轴成 $\pm 45°$ 角时，出射光为**圆偏振光**。圆偏振光入射时，出射光为**线偏振光**。
2. **二分之一波片 ($\lambda/2$ 波片或半波片)**
厚度满足 $|n_o - n_e|d = \lambda/2$（或其奇数倍），产生的相位差 $\delta = \pi$（或 $\pi + 2k\pi$）。
   - **功能**：可旋转线偏振光的振动方向。
   - **规律**：出射线偏振光的振动方向，相对于入射光的振动方向绕光轴转过 $2\theta$ 角（$\theta$ 为入射光振动方向与波片光轴的夹角）。

- **注意**：波片的作用效果与入射光的波长有关。公式中的 $\lambda$ 是特定波长，因此一个波片通常只对某一特定波长的光产生精确的相位延迟。

### 2.3.5 *Jones 矩阵

- 用于描述偏振器件（如波片、偏振片、旋光器件）对光偏振态的线性变换。
- 若入射光的 Jones 矢量为 $\mathbf{J}_{in}$，经过一个光学元件后，出射光的 Jones 矢量 $\mathbf{J}_{out}$ 为：

$$\mathbf{J}_{out} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}_{in}$$

其中 $\mathbf{M}$ 是该元件的 $2 \times 2$ Jones 矩阵。

- **常见偏振器件的 Jones 矩阵**：
  - **透振方向沿 x 轴的理想线偏振器**：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - **快轴沿 x 轴的 $\lambda/4$ 波片**（产生 $\pi/2$ 相位延迟）：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

- **快轴沿 x 轴的** $\lambda/2$ **波片**（产生 $\pi$ 相位延迟）：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- **旋光器件**（使偏振面旋转角度 $\theta$）：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- 多个偏振元件级联时，系统总的 Jones 矩阵为各元件矩阵的倒序乘积：$\mathbf{M}_{total} = \mathbf{M}_n \cdots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$。